
Curvas Algebraicas Planas:
una introducción suave

Plane Algebraic Curves:
a gentle introduction

EMALCA, GUANACASTE, 2024.

RENZO CAVALIERI



Detail from *Topology tree*, Kris Barz, 2015.



Dedicado a los estudiantes de EMALCA 2024 en Liberia, Guanacaste.

Contents

I	Español	7
1	Rectas y planos	11
1.1	Varios tipos de planos	11
1.1.1	El plano cartesiano	11
1.1.2	El plano afín	13
1.1.3	El plano proyectivo	14
1.2	Rectas en el plano	16
1.2.1	Rectas afines	16
1.2.2	Rectas proyectivas	17
1.3	Ejercicios	18
2	Curvas algebraicas planas	21
2.1	Curvas afines	21
2.2	Curvas proyectivas	24
2.3	Rectas tangentes y suavidad	26
2.4	Puntos singulares	26
2.5	Ejercicios	29
3	Cómo se intersecan las curvas	33
3.1	Intersección transversal	34
3.2	¿Qué queremos de la multiplicidad?	34
3.3	Definiciones de multiplicidad	36
3.3.1	Algebraica	36
3.3.2	Analítica	37
3.4	Ejercicios	39
4	Bézout y aplicaciones	41
4.1	Teorema de Bézout	41

4.2	Racionalidad de las curvas	43
4.3	Cotas del número de puntos singulares	44
4.4	Género de una curva suave	46
4.5	Ejercicios	47

II English 51

1 Planes and lines 55

1.1	Various types of planes	55
1.1.1	The Cartesian plane	55
1.1.2	The affine plane	56
1.1.3	The projective plane	57
1.2	Lines in the plane	59
1.2.1	Affine lines	59
1.2.2	Projective lines	61
1.3	Exercises	61

2 Plane algebraic curves 65

2.1	Affine curves	65
2.2	Projective curves	68
2.3	Tangent lines and smoothness	69
2.4	Singular points	70
2.5	Exercises	73

3 How curves meet 77

3.1	Transversal intersection	78
3.2	What do we want from a multiplicity?	78
3.3	Definitions of multiplicity	80
3.3.1	Algebraic	80
3.3.2	Analytic	81
3.4	Exercises	83

4 Bézout and Applications 85

4.1	Bézout's theorem	85
4.2	Rationality of curves	87
4.3	Bounds on singularities	88
4.4	Genus of a smooth curve	89

4.5 Exercises 91

Parte I
Español

Prólogo

La geometría algebraica es, por su naturaleza, una parte interdisciplinaria de las matemáticas. El álgebra se utiliza como una forma de describir objetos geométricos y sistematizar el cálculo de propiedades geométricas. La geometría proporciona intuición y elementos visuales (en un sentido bastante abstracto) para organizar la estructura algebraica. Es un cuerpo muy amplio, que va desde la abstracción extrema (gracias, Grothendieck) hasta lo extremadamente aplicable (por ejemplo, métodos geométricos algebraicos computacionales para optimizar el análisis de datos).

Ya sea que desee ubicarse en algún lugar dentro de este rango o mantenerse alejado de ser un geómetra algebraico profesional, como matemático es importante tener al menos una perspectiva de alto nivel de cómo se establece este diccionario.

Lamentablemente, la geometría algebraica rara vez se presenta a los estudiantes universitarios de pregrado porque se considera un cuerpo demasiado técnico.

En este minicurso mi objetivo es darle a usted una pincelada de algunas ideas de geometría algebraica a través del estudio de curvas planas, que son objetos bastante simples, pero ya extremadamente interesantes. En este caso, el diccionario lo proporciona la *ecuación*, un solo polinomio en dos variables que identifica un lugar geométrico de puntos en el plano (es decir, los puntos cuyas coordenadas hacen que el polinomio se anule).

Veremos cómo podemos leer las propiedades geométricas de la curva mediante álgebra polinomial. Por ejemplo, una curva no se puede descomponer como una unión de curvas más simples precisamente cuando el polinomio da la ecuación no se puede factorizar como producto de polinomios más simples.

Una vez que nos familiarizamos con las curvas algebraicas, establecemos una teoría de intersección de curvas. Vemos que, para obtener una teoría que se comporte bien, necesitamos contar las intersecciones con multiplicidades.

En analogía, piense en cómo en álgebra contamos las raíces de un polinomio univariado con multiplicidades para obtener el enunciado limpio del *teorema fundamental del álgebra*: cualquier polinomio (complejo) de grado d tiene exactamente d raíces.

La afirmación análoga en la teoría de curvas es el teorema de Bézout, que establece que dos curvas cualesquiera (complejas, proyectivas) de grado d_1 y d_2 se cruzan precisamente en $d_1 \cdot d_2$ puntos.

Ya existen (al menos) dos referencias maravillosas que presentan, con cuidado y detalle, la teoría de curvas algebraicas a una audiencia de estudiantes universitarios:

I. Vainsencher. *Introdução às Curvas Algébricas Planas.*

<https://impa.br/page-livros/introducao-as-curvas-algebricas-planas/>

A. Gathman. *Plane Algebraic Curves*

<https://agag-gathmann.math.rptu.de/en/curves.php>

Leí estos recursos, elegí algunos aspectos de ellos y agregué un poco de mi perspectiva para escribir estas notas. Estas notas están menos pulidas y no son completamente autónomas, pero lo que intenté enfatizar es la intuición y el proceso de pensamiento que implica desarrollar una teoría matemática. Intenté empezar asumiendo muy poco, y quería mostrar que incluso nociones matemáticas que creemos conocer de toda la vida pueden sorprendernos cuando las pensamos con ojos más sofisticados: por ejemplo, ¿qué es exactamente un plano? También he tratado de mostrar múltiples puntos de vista que se pueden adoptar sobre un solo concepto (por ejemplo, di dos definiciones equivalentes de multiplicidad de intersección, una basada en álgebra conmutativa y la otra en análisis).

Espero que al final este curso pueda prepararte para tu primer curso formal de geometría algebraica y te ayude a desmitificar toda el aura de misterio que rodea la lista aparentemente interminable de definiciones abstractas que uno encuentra. Lo más importante es que espero que disfrutes este curso y quieras volver por más.

¡Pura vida!

Renzo Cavalieri

Lección 1

Rectas y planos

Hoy analizaremos dos objetos matemáticos con los que estamos familiarizados desde hace mucho tiempo: rectas y planos. Descubriremos que un enfoque más sofisticado de estas ideas elementales nos brinda múltiples perspectivas sobre lo que significan estas palabras y cuáles son sus propiedades matemáticas.

1.1 Varios tipos de planos

Todos tenemos una intuición sobre lo que significa la palabra *plano*. Es algún objeto geométrico que se extiende indefinidamente en dos direcciones independientes y es completamente...bueno...plano.

Por supuesto, nada parecido existe en la naturaleza. Nuestra noción intuitiva de un plano abstrae y generaliza ciertas realidades que percibimos. Por ejemplo, si una hormiga se encuentra en medio de un lago congelado muy extenso, para todos los efectos prácticos puede considerar su entorno como un plano.

Seamos un poco más refinados y hagamos algunas definiciones formales sobre lo que entendemos por plano. En el proceso, descubriremos que podría haber más de un tipo de plano...

1.1.1 El plano cartesiano

El plano cartesiano nace de la intuición de que, si sabemos medir distancias y ángulos sobre ese objeto ideal que llamamos plano, entonces al *elegir* dos

ejes ortogonales podemos construir dos funciones (normalmente llamadas x y y , y también llamadas *funciones de coordenadas* o simplemente *coordenadas*) del plano al conjunto de números reales \mathbb{R} . Juntas, estas dos funciones proporcionan una biyección entre los puntos del plano y el conjunto de pares ordenados de números reales. Además, podemos utilizar el teorema de Pitágoras para expresar la distancia entre dos puntos cualesquiera en términos de sus coordenadas.

Definición 1.1. El **plano cartesiano** es un espacio geométrico P (lo que es un conjunto cuyos elementos llamamos puntos) junto con dos funciones

$$x : P \rightarrow \mathbb{R},$$

$$y : P \rightarrow \mathbb{R},$$

llamadas **coordenadas**. Las dos funciones de coordenadas combinadas dan una biyección:

$$(x, y) : P \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Muchas veces esta biyección se utiliza para identificar puntos en el plano con sus imágenes, y es común decir que el plano cartesiano *es* \mathbb{R}^2 . En este contexto, las funciones x y y actúan como las proyecciones sobre los dos factores.

La distancia entre dos puntos cualesquiera $p_1, p_2 \in P$ se define como:

$$\text{dist}(p_1, p_2) := \sqrt{(x(p_2) - x(p_1))^2 + (y(p_2) - y(p_1))^2}.$$

Los ángulos formados al elegir tres puntos también se pueden definir en términos de expresión algebraica de las coordenadas de los puntos. Describir esta expresión se deja como ejercicio al lector.

Esta perspectiva permite conectar nuestra intuición geométrica (que es necesariamente difícil de precisar) con un objeto algebraico bien definido.

Pregunta 1. *Dado que la definición de las funciones de coordenadas depende de la elección de ejes, ¿pueden diferentes elecciones de ejes dar lugar a diferentes sistemas de coordenadas para el mismo plano? ¿Cómo se relacionan estos diferentes sistemas de coordenadas?*

1.1.2 El plano afín

Ahora imaginemos que relajamos nuestra construcción del plano cartesiano de dos maneras:

1. no necesitamos que los ejes sean ortogonales;
2. nos permitimos elegir en cada eje un punto que decidamos que va a ser nuestra unidad de medida en esa dirección.

Aún obtenemos un sistema de coordenadas para nuestro plano geométrico, y los puntos en el plano todavía están en biyección con \mathbb{R}^2 .

El mismo plano puede tener muchos sistemas de coordenadas, los cuales están relacionados entre sí mediante *transformaciones afines*, es decir, funciones de la forma:

$$\begin{cases} x_2 = a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + b_1 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + b_2, \end{cases} \quad (1.1)$$

dónde:

- $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ son dos sistemas diferentes de coordenadas en el plano afín;
- los coeficientes a_{ij}, b_i son números reales sujetos a la condición de que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

Cuando consideramos el plano con un sistema de coordenadas afines (en particular equivalente a cualquier otro conjunto de coordenadas que difiera por una transformación afín), denotamos el plano por $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$.

Debido a nuestra intuición física, preferimos usar números reales para *medir* distancias y por lo tanto, las funciones de coordenadas toman valores en \mathbb{R} . Sin embargo, nada nos impide tener funciones de coordenadas que tomen valor en otro cuerpo k . El plano afín así obtenido se denota por \mathbb{A}_k^2 .

Nos interesará especialmente el plano afín sobre los números complejos $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$, cuyos puntos están definidos por 2 números complejos. Desafortunadamente, es común referirse a esto *plano complejo*, aunque esto no concuerde con lo que llamamos plano complejo en análisis, que es solo el cuerpo \mathbb{C} .

1.1.3 El plano proyectivo

Introducimos ahora una noción de plano algo más sofisticada, conocida como el *plano proyectivo*. Los orígenes conceptuales de esta construcción matemática están en el hecho de que vivimos en una realidad tridimensional, pero sólo podemos dibujar en un lienzo bidimensional. Entonces lo que vemos en una fotografía es una proyección del espacio tridimensional de tal manera que todos los puntos que están en línea recta con la cámara terminan aplastados. Una fotografía es un trozo de plano que captura una proyección de nuestro mundo $3d$. Ahora bien, imagine un rollo de película infinitamente grande... bueno, ese es un plano en el que podemos proyectar nuestro mundo $3d$... pero... incluso si el tamaño de la foto es infinito, todavía vamos a perder una porción (aun pequeña) de nuestro mundo $3d$: los puntos que se encuentran en los rayos que pasan por el ojo de la cámara y que son paralelos a la película. La perspectiva del plano proyectivo es que, dado que nuestra elección de ubicación de la cámara es bastante arbitraria, estos puntos no deben olvidarse.

Trabajemos un poco para hacer esta intuición un poco más precisa.

Definición 1.2. El conjunto de puntos del *plano proyectivo* $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ son los subespacios vectoriales unidimensionales de \mathbb{R}^3 , o, de manera equivalente, el conjunto de rectas que pasan por el origen en \mathbb{R}^3 .

Observe que \mathbb{R}^3 tiene coordenadas (X, Y, Z) , y si conocemos las coordenadas de un punto P en \mathbb{R}^3 que no es el origen, entonces podemos encontrar una línea única que pasa por P y el origen. Por lo tanto, las funciones de coordenadas de \mathbb{R}^3 identifican puntos de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Sin embargo, muchas ternas diferentes de números reales (es decir, todas las coordenadas de puntos que viven en la misma línea) identifican el mismo punto del plano proyectivo.

En particular, dos ternas de números reales (X_0, Y_0, Z_0) y (X_1, Y_1, Z_1) corresponden al mismo punto del plano proyectivo cuando existe un número real distinto de cero λ tal que

$$(X_1, Y_1, Z_1) = (\lambda X_0, \lambda Y_0, \lambda Z_0). \quad (1.2)$$

Por esta razón (X, Y, Z) no son coordenadas útiles para el plano proyectivo, las cambiamos por *coordenadas homogéneas* que se denotan por $(X : Y : Z)$, donde los dos puntos nos recuerdan que sólo nos preocupamos por las clases de equivalencia bajo la relación de equivalencia descrita en (1.2).

Para ver que este objeto geométrico es *casi* un plano, podemos tomar cualquier plano Π en \mathbb{R}^3 que no pase por el origen, y ver que existe una función inyectiva natural $i_\Pi : \Pi \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Para ser muy concretos, elijamos el plano $\Pi_Z = \{Z = 1\}$, que podemos pensar en un plano afín con coordenadas $x = X, y = Y$.

Entonces cualquier punto $p = (x_0, y_0) \in \Pi_Z$ nos da el punto

$$(X : Y : Z) = (x_0 : y_0 : 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2.$$

Viceversa, cualquier punto $(X_0 : Y_0 : Z_0)$ en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ con $Z_0 \neq 0$ da lugar al punto en Π_Z con coordenadas

$$(x, y) = \left(\frac{X_0}{Z_0}, \frac{Y_0}{Z_0} \right).$$

Cualquier punto en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ con coordenadas homogéneas $Z = 0$ no está en la imagen de la función i_Π . Este corresponde a una línea horizontal, a la que podemos acercarnos tanto como queramos dejando que las coordenadas (x, y) en el plano Π crezcan cada vez más. Por esta razón los puntos con coordenada Z cero se llaman **puntos al infinito** para el plano Π . Se debe tener en cuenta que ser un punto al infinito no es una propiedad intrínseca de ciertos puntos de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ sino que depende de la elección de una *pantalla* (un plano que no pasa por el origen) en \mathbb{R}^3 .

Finalmente consideremos la noción de cambio de coordenadas en el plano proyectivo. Dado que las coordenadas homogéneas en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ son inducidas por las coordenadas de \mathbb{R}^3 , y cualquier isomorfismo lineal de \mathbb{R}^3 preserva las líneas que pasan por el origen, se deduce que cualquier elemento en $GL(3, \mathbb{R})$ determina un cambio de coordenadas de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Sin embargo, dos de estos mapas lineales producirán el mismo mapa desde el plano proyectivo hacia sí mismo si sus coeficientes difieren en una escala uniforme. A una clase de equivalencia de tales mapas la llamamos *proyectividad*, y tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

con el determinante de la matriz 3×3 de los a_{ij} diferente de 0.

Al igual que en el caso afín, podemos sustituir \mathbb{R} con nuestro cuerpo favorito y todo saldrá bien. Denotamos el plano proyectivo sobre el cuerpo k por \mathbb{P}_k^2 .

1.2 Rectas en el plano

Las curvas planas más simples son líneas rectas. Presentamos aquí algunas formas de describir y estudiar líneas, tanto en el plano afín como en el proyectivo.

1.2.1 Rectas afines

Hay dos formas diferentes de describir una línea en el plano: dando una ecuación que relacione las coordenadas de los puntos, o proporcionando una parametrización de la línea, es decir, una función de una línea abstracta en el plano. Nos acercamos a la idea de diferentes cuerpos sustituyendo \mathbb{R} por un cuerpo arbitrario k de característica 0. Pero siéntase libre de pensar en $k = \mathbb{R}$ si eso lo hace sentirse más cómodo al principio. Por otro lado, si usted es un aficionado al álgebra, es posible que desee pensar en las sutilezas que pueden surgir cuando se permite que el cuerpo tenga característica positiva. Pista: en el caso de las líneas todo seguirá exactamente igual, pero las cosas se vuelven un poco más delicadas en cuanto uno va más allá de las líneas.

Definición 1.3. Una *línea* en \mathbb{A}_k^2 es el lugar geométrico de todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación lineal (afín), es decir, una ecuación de la forma:

$$ax + by + c = 0, \quad (1.4)$$

donde $a, b, c \in k$. De manera equivalente, una línea es la imagen de una función $\ell : \mathbb{A}_k^1 \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ de la forma:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + ut \\ y(t) = y_0 + vt \end{cases}, \quad (1.5)$$

donde $x_0, y_0, u, v \in k$.

Pregunta 2. *¿Cómo se pasa de una descripción de una línea a otra?*

Observemos que la ecuación de una recta es más o menos única: la única ambigüedad es un factor de escala uniforme. Por otro lado una misma línea puede admitir varias parametrizaciones diferentes.

Los principales resultados sobre líneas, cuya demostración se pedirá en forma de ejercicios, son los siguientes:

Teorema 1.1. *Dados dos puntos distintos en el plano, existe una única línea que los contiene.*

Teorema 1.2. *Dadas dos líneas $\ell_1, \ell_2 \subseteq \mathbb{A}_k^2$, sucede exactamente una de las siguientes opciones:*

- *las dos rectas son la misma recta, y por tanto tienen infinitos puntos en común;*
- *hay exactamente un punto que pertenece tanto a ℓ_1 como a ℓ_2 ;*
- *$\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$, en cuyo caso decimos que las dos rectas son paralelas.*

1.2.2 Rectas proyectivas

Al igual que en el caso afín, hay dos maneras diferentes de describir una recta en el plano proyectivo: dando una ecuación que relacione las coordenadas homogéneas de los puntos, o proporcionando una parametrización de la recta, es decir, una función a partir de una línea proyectiva abstracta en el plano.

Definición 1.4. Una *línea* en \mathbb{P}_k^2 es el lugar geométrico de todos los puntos cuyas coordenadas homogéneas satisfacen una ecuación lineal (homogénea), es decir, una ecuación de la forma:

$$aX + bY + cZ = 0, \quad (1.6)$$

donde $a, b, c \in k$. De manera equivalente, una línea es la imagen de una función $L : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ de la forma:

$$\begin{cases} X(s : t) = sX_0 + tX_1 \\ Y(s : t) = sY_0 + tY_1 \\ Z(s : t) = sZ_0 + tZ_1. \end{cases}, \quad (1.7)$$

donde $X_0, Y_0, Z_0, X_1, Y_1, Z_1 \in k$.

Pregunta 3. *¿A qué le recuerda (1.7)? Pista: del álgebra lineal...*

Los principales resultados sobre las líneas proyectivas son los siguientes:

Teorema 1.3. *Dados dos puntos distintos en el plano, existe una única línea que los contiene.*

Teorema 1.4. *Dadas dos líneas $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{P}_k^2$, sucede exactamente una de las siguientes opciones:*

- *las dos rectas son la misma recta, y por tanto tienen infinitos puntos en común;*
- *hay exactamente un punto que pertenece tanto a L_1 como a L_2 .*

Pregunta 4. *¿Qué pasó con las rectas paralelas?*

1.3 Ejercicios

Ejercicio 1.1. Considere el plano cartesiano $(\mathbb{R}^2, (x, y))$. Dados tres puntos p_0, p_1, p_2 en el plano, encuentre una descripción para el ángulo $\widehat{p_1 p_0 p_2}$ en términos de las coordenadas de los tres puntos.

Ejercicio 1.2. Discuta la *Pregunta 1* con los demás estudiantes. Si llegan a una conclusión sobre la pregunta, intenten encontrar la relación entre diferentes sistemas de coordenadas en el plano.

Ejercicio 1.3. Escriba la transformación afín de la ecuación (1.1) como un producto matricial.

Ejercicio 1.4. ¿Puede darle un significado geométrico a los coeficientes a_{ij}, b_i de la transformación (1.1)?

Ejercicio 1.5. Demuestre que dados tres puntos no colineales cualesquiera $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{A}_k^2$ existe una afinidad $\alpha : \mathbb{A}_k^2 \rightarrow \mathbb{A}_k^2$ tal que

$$\alpha((0, 0)) = p_0 \quad \alpha((1, 0)) = p_1 \quad \alpha((0, 1)) = p_2.$$

Ejercicio 1.6. Considere el plano proyectivo y la inclusión del plano $\Pi_X = \{X = 1\}$ con coordenadas $(\tilde{y}, \tilde{z}) = (Y, Z)$. ¿Cómo se relacionan las coordenadas (\tilde{y}, \tilde{z}) con las coordenadas (x, y) del plano Π_Z visto en clase?

Ejercicio 1.7. Considere 4 puntos en \mathbb{P}_k^2 con coordenadas homogéneas $(X_i : Y_i : Z_i)$ para $i = 1, \dots, 4$. Supongamos además que la matriz 3×4 de estas coordenadas homogéneas tiene rango 3. Demuestre que existe una proyectividad única $p : \mathbb{P}_k^2 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$ tal que

$$\begin{aligned} p(1 : 0 : 0) &= (X_1 : Y_1 : Z_1), & p(0 : 1 : 0) &= (X_2 : Y_2 : Z_2), \\ p(0 : 0 : 1) &= (X_3 : Y_3 : Z_3), & p(1 : 1 : 1) &= (X_4 : Y_4 : Z_4). \end{aligned}$$

¿Por qué se necesita la condición del rango de la matriz?

Ejercicio 1.8. ¿Cómo se comprueba cuando un punto $P \in \mathbb{A}_k^2$ pertenece a una recta, cuando la recta se describe mediante su ecuación? ¿Qué tal si se describe mediante una parametrización?

Ejercicio 1.9. ¿Cómo se comprueba cuando dos rectas son paralelas, cuando las rectas se describen mediante sus ecuaciones? ¿Qué tal si se describieran mediante dos parametrizaciones? ¿Qué tal si una viene dado por su ecuación y la otra por una parametrización?

Ejercicio 1.10. ¿Cómo se encuentran los puntos de intersección de dos rectas, cuando las rectas se describen mediante sus ecuaciones? ¿Qué tal si se describieran mediante dos parametrizaciones? ¿Qué tal si una viene dada por su ecuación y la otra por una parametrización?

Ejercicio 1.11. Usando los resultados de los ejercicios anteriores, demuestre el Teorema (1.4) y el Teorema (1.5).

Ejercicio 1.12. Responde las preguntas análogas a los Ejercicios 1.8 y 1.10 en el caso proyectivo.

Ejercicio 1.13. Considere una línea ℓ con ecuación $ax + by + c = 0$ en \mathbb{A}_k^2 . Ahora identifique el plano afín \mathbb{A}_k^2 con el plano $\{Z = 1\}$ de k^3 y considere la línea $L \subset \mathbb{P}_k^2$ que contiene ℓ . ¿Cuál es la ecuación de L ? Demuestre que L contiene exactamente un punto en el infinito. Llamamos a L la **clausura proyectiva** de ℓ .

Ejercicio 1.14. Considere $\mathbb{A}_k^2 \subset \mathbb{P}_k^2$. Demuestre que el conjunto de puntos en el infinito da una recta en \mathbb{P}_k^2 .

Ejercicio 1.15. Demuestre que la clausuras proyectivas de dos rectas paralelas afines se intersecan en un punto en el infinito.

Ejercicio 1.16. Demuestre que el conjunto de todas las líneas en \mathbb{P}_k^2 está a su vez parametrizado por un plano proyectivo. A veces esto se llama **plano dual** y se denota por $(\mathbb{P}_k^2)^\vee$.

Lección 2

Curvas algebraicas planas

Hoy presentamos a los personajes principales de este minicurso: curvas algebraicas, es decir, lugares geométricos en el plano descritos como las soluciones de una ecuación polinomial. Nos centraremos en algunas propiedades locales, es decir, propiedades de puntos en la curva que dependen únicamente de cómo se ve la curva en un (pequeño) vecindario del punto. Veremos que tener una recta tangente bien definida es lo que hace que una curva sea suave en un punto, y veremos qué tipo de cosas suceden cuando la curva no es suave.

2.1 Curvas afines

Comenzamos definiendo lo qué es una curva algebraica. Generalizamos la definición de una recta en el plano permitiendo que la ecuación polinomial que la define tenga grado mayor a uno.

Definición 2.1. Una **curva algebraica plana afín** $C \subset \mathbb{A}_k^2$ es el lugar geométrico de los puntos en el plano cuyas coordenadas satisfacen una ecuación polinomial en dos variables; es decir, sea $f(x, y) \in k[x, y]$, entonces:

$$C = \{p \in \mathbb{A}_k^2 \mid f(x(p), y(p)) = 0\}.$$

Denotamos por $V(f)$ la curva plana afín determinada por el polinomio f . Si f es un polinomio de grado d , decimos que $V(f)$ es una curva de **grado** d .

Ejemplo 2.2. El primer ejemplo de curvas algebraicas planas afines son, por supuesto, las líneas, que son curvas de grado 1:

$$\ell = V(ax + by + c),$$

donde $a, b, c \in k$.

Ejemplo 2.3. Las curvas planas afines reales de grado dos se llaman secciones cónicas (o simplemente **cónicas** para abreviar), porque todas pueden obtenerse al cortar un cono en tres dimensiones con un plano. Exploraremos esto en el Ejercicio 2.1. A continuación se muestran algunos ejemplos familiares de cónicas:

círculo:

$$V(x^2 + y^2 - R^2),$$

con $R \in \mathbb{R}_{>0}$ el radio.

parábola:

$$V(y - ax^2 - bx - c),$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$.

elipse:

$$V(a^2x^2 + b^2y^2 - c^2),$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$.

hipérbola:

$$V(a^2x^2 - b^2y^2 - c^2),$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$.

dos líneas:

$$V(xy).$$

una sola línea: también puede ser una curva de grado 2

$$V(x^2).$$

Los dos últimos ejemplos son un poco extraños... en cierto sentido, lo que nos dice el álgebra (que estas curvas son cónicas) entra en conflicto con lo que nos dicen nuestros ojos, que es que estas formas simplemente están formadas por líneas. Conciliamos esta discrepancia con las siguientes definiciones.

Definición 2.4. Una curva plana afín C es **irreducible** si no puede escribirse como la unión no trivial de dos curvas algebraicas C_1, C_2 . (es decir, ambos $C_i \neq C$ para $i = 1, 2$.)

Una curva plana afín C de grado d se dice **reducida** si no es igual a una curva plana afín de grado estrictamente inferior.

Así, vemos que la curva $V(xy)$ no es irreducible y la curva $V(x^2)$ no es reducida. En el Ejercicio 2.5 veremos que una curva $V(f)$ es irreducible si y sólo si f es un polinomio irreducible en el sentido algebraico, y $V(f)$ se reduce si y solo si la factorización prima de f no contiene factores repetidos. Restringiremos nuestra atención principalmente a las curvas **reducidas, irreducibles**.

Una perspectiva simple pero importante sobre las curvas algebraicas es que se puede pensar en el polinomio f como una función $f : \mathbb{A}_k^2 \rightarrow k$, y la curva $V(f)$ como la curva de nivel para dicha función, o si se quiere como la imagen inversa del punto $0 \in k$:

$$V(f) = f^{-1}(0).$$

Observación 2.5. Supongamos que tenemos una función $\Phi : \mathbb{A}_k^2 \rightarrow \mathbb{A}_k^2$ y una curva plana afín $V(f)$. Es fácil considerar la imagen inversa de $V(f)$ a través de Φ , porque eso es simplemente $V(f \circ \Phi)$. Es sustancialmente más complicado describir la imagen de la curva mediante Φ .

En particular si $T : (\tilde{x}, \tilde{y}) = T(x, y)$ es un cambio de coordenadas, y $f \in k[x, y]$ define una curva $C = V(f)$, entonces la curva en las nuevas coordenadas es $V(f \circ T^{-1})$.

Siempre que estemos interesados en alguna propiedad geométrica que sea invariante bajo el cambio de coordenadas elegido, podemos optar por cambiar las coordenadas para simplificar nuestras vidas.

Ejemplo 2.6. La ecuación de un círculo en el plano puede resultar bastante complicada. Por otro lado, si uno elige un sistema de referencia cartesiano que tiene el origen en el centro del círculo, entonces la ecuación se simplifica a $x^2 + y^2 = R^2$, con el radio del círculo fácilmente leído. fuera de la ecuación.

Definición 2.7. Una **parametrización** de una curva plana afín C es una función genéricamente inyectiva $\phi : k \rightarrow \mathbb{A}_k^2$ de la forma:

$$\phi : \begin{cases} x(t) = \frac{p(t)}{q(t)} \\ y(t) = \frac{r(t)}{s(t)} \end{cases},$$

con $p, q, r, s \in k[t]$.

No todas las curvas planas afines admiten una parametrización. Aquellas que lo hacen se denominan curvas **racionales**.

Ya hemos visto que todas las líneas son curvas racionales. Más adelante demostraremos que todas las cónicas también son racionales. Tan pronto como el grado sube a tres, la situación se vuelve un poco más sutil e interesante.

2.2 Curvas proyectivas

Ahora centramos nuestra atención en las curvas en el plano proyectivo \mathbb{P}_k^2 . En primer lugar, observemos que una ecuación polinomial general no tiene un conjunto bien definido de soluciones en el espacio proyectivo.

Por ejemplo, la ecuación $X - 1 = 0$ se satisface con la tripleta $(X, Y, Z) = (1, 1, 1)$, pero no con la tripleta $(X, Y, Z) = (2, 2, 2)$. Pero $(1 : 1 : 1) = (2 : 2 : 2)$ en el sentido de coordenadas homogéneas, lo que significa que el punto correspondiente en \mathbb{P}_k^2 simultáneamente es y no es una solución. Eso no es bueno. Solucionamos el problema restringiendo nuestra atención sólo a polinomios homogéneos.

Definición 2.8. Una **curva algebraica plana proyectiva** $C \subset \mathbb{P}_k^2$ es el lugar geométrico de los puntos en el plano cuyas coordenadas homogéneas satisfacen una ecuación polinomial homogénea en tres variables; es decir, sea $F(X, Y, Z) \in k[X, Y, Z]$ homogéneo, entonces:

$$C = \{\bar{p} \in \mathbb{P}_k^2 \mid F(X(p) : Y(p) : Z(p)) = 0, (p \in k^3)\}.$$

Denotamos por $V(F)$ la curva plana proyectiva determinada por el polinomio F . Si F es un polinomio de grado d , llamamos $V(F)$ una curva de **grado** d .

Las rectas y las cónicas tienen su versión proyectiva, simplemente tomando polinomios homogéneos de grado uno y dos.

Como en el caso afín, se puede utilizar un cambio proyectivo de coordenadas para simplificar el estudio de las propiedades de una curva proyectiva que son invariantes ante cambios proyectivos de coordenadas. Dos curvas proyectivas que difieren por un cambio de coordenadas se denominan **proyectivamente equivalentes**.

Definición 2.9. Una **parametrización** de una curva plana proyectiva C es una función genéricamente inyectiva $\phi : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$ de la forma:

$$\phi : \begin{cases} X(S : T) = P(S, T) \\ Y(S : T) = Q(S, T) \\ Z(S : T) = R(S, T) \end{cases},$$

con $P, Q, R \in k[S, T]$ polinomios homogéneos del mismo grado d .

No todas las curvas planas proyectivas admiten una parametrización. Las que sí lo hacen se denominan curvas **racionales**.

Dada una curva proyectiva en $C \subset \mathbb{P}_k^2$, uno puede obtener una curva afín tomando su imagen inversa en k^3 e intersectando con cualquier plano que no pase por el origen de k^3 . Si bien este procedimiento funciona con cualquier plano que elija (junto con una selección de coordenadas afines compatibles con las coordenadas lineales de k^3), hay tres planos distinguidos para los cuales la ecuación de la curva afín resultante se puede describir fácilmente: los planos $\Pi_Z = \{Z = 1\}$, $\Pi_Y = \{Y = 1\}$ y $\Pi_X = \{X = 1\}$.

En este caso, la ecuación para las curvas afines resultantes viene dada por **deshomogenizar** el polinomio:

$$f_X(y, z) := F(1, y, z),$$

$$f_Y(x, z) := F(x, 1, z),$$

$$f_Z(x, y) := F(x, y, 1).$$

Ejemplo 2.10. Observe que las curvas afines que se pueden obtener a partir de diferentes deshomogenizaciones pueden ser curvas afines bastante diferentes. Por ejemplo, si $F = X^2 + Y^2 - Z^2$, tenemos eso

$$V(f_Z) = V(x^2 + y^2 - 1)$$

es un círculo, mientras

$$V(f_X) = V(1 + y^2 - z^2)$$

es una hipérbola.

Viceversa, dada una curva afín en un plano con coordenadas x, y , podemos identificar el su plano ambiente con el plano $\{Z = 1\}$ en k^3 . Entonces una curva afín $V(f)$ define de forma natural una curva proyectiva $V(F)$, donde F es la **homogenización** del polinomio f :

$$F(X, Y, Z) = Z^{\deg(f)} f(X/Z, Y/Z).$$

La homogenización y la deshomogenización son operaciones casi inversas entre sí. En el ejercicio 2.13, precisaremos lo que significa *casi*.

2.3 Rectas tangentes y suavidad

En esta sección desarrollamos la noción de suavidad de una curva. Intuitivamente, una curva es suave en un punto p si cuando se acerca mucho al punto, la curva se parece a una pequeña parte del cuerpo k . Esta es una propiedad local (depende sólo de un vecindario de p), por lo que podemos permitirnos estudiarla solo para curvas planas afines. La forma en que formalizamos esta idea es que podemos encontrar una única recta que se aproxima mejor a la curva en el punto p .

Si tomamos la perspectiva de que una curva afín es el conjunto de niveles de una función, entonces el cálculo nos dice que el gradiente de la función en un punto p debe ser perpendicular al conjunto de niveles. Por lo tanto, una recta tangente, si existe, es la recta que pasa por el punto p que es perpendicular al gradiente de la función. Esto nos motiva a realizar la siguiente definición.

Definición 2.11. Sea $p \in C = V(f)$ un punto de una curva plana afín en \mathbb{A}_k^2 . Decimos que C es **suave en** p si

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p) \right) \neq (0, 0),$$

es decir, si al menos una de las derivadas parciales de f no es cero en p .

Decimos que C es una curva **suave** si es suave en todos los puntos.

Si C es suave en un punto p , entonces la **recta tangente** a C en p se define como:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p) \right) \cdot (x - x(p), y - y(p)) = 0.$$

2.4 Puntos singulares

Los puntos de una curva que no son suaves se llaman **singulares**. En esta sección nos centramos en la geometría local de una curva plana cerca de un punto singular. Nuevamente, como estamos haciendo un análisis local, podemos restringir nuestra atención a las curvas afines, y como nos vamos a centrar en un punto singular a la vez, podemos simplificar nuestra álgebra eligiendo un sistema de coordenadas que ponga dicho punto en el origen (tenga en cuenta que esto siempre se puede hacer mediante una traslación, por ejemplo).

Damos como un hecho (es menos obvio de lo que parece al principio, pero demostrarlo nos llevaría por un desvío demasiado largo) que una curva algebraica plana, reducida e irreducible tiene un número finito de puntos singulares.

Definición 2.12. Sea p un punto singular de $V(f)$, y sin pérdida de generalidad supongamos que hemos elegido un sistema de coordenadas tal que $p = (0, 0)$. Entonces p se dice ser **m -tuplo** si m es el grado más bajo que aparece en un monomio de f con coeficiente distinto de cero.

Ejemplo 2.13. Para $f(x, y) = x^3 - xy$ o $g(x, y) = x^3 - y^2$, el origen es un punto doble.

Para un punto singular p no hay una recta tangente bien definida, pero hay una colección de rectas tangentes que se aproximan mejor linealmente a la geometría de la curva cerca de p .

Definición 2.14. Para p un punto m -tuplo de $V(f)$, denote por f_m la parte de f de grado m . Si k es algebraicamente cerrado, $\{f_m = 0\}$ es una colección de m rectas (contadas con multiplicidad), llamada **cono tangente** de $V(f)$ en p .

Ejemplo 2.15. El cono tangente de $V(x^5 + x^3y + x^2y^2)$ está dado por la unión de las rectas $x = 0$, $y = 0$ y $x + y = 0$. La recta $x = 0$ se cuenta con multiplicidad dos, por lo que el cono tangente debe considerarse como cuatro rectas.

Al tipo más simple de puntos singulares, cuando $m = 2$, se les ha dado nombres basados en el aspecto del cono tangente: un punto doble cuyo cono tangente consta de dos líneas distintas se llama **nodo**, mientras que uno cuyo cono tangente consta de una línea doble se llama **cúspide**.

Concluimos esta sección con un método que brinda una aproximación más refinada del comportamiento de una curva cerca de un punto singular.

Muy cerca del origen, los valores de x y y son muy pequeños... en cálculo y en algunas clases de análisis los llamamos infinitesimales. Cuando estudiamos límites introducimos el concepto de órdenes de infinitesimales y mostramos, por ejemplo, que un límite de un cociente de funciones sólo depende de los órdenes de infinitesimales de las dos funciones.

Ahora considere una ecuación polinomial y supongamos que hemos factorizado cualquier factor común de x o y , por lo que la ecuación no representa

una curva reducible que tenga uno de los ejes como componente. Para ser concretos tomemos el ejemplo específico:

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + x^2 + xy.$$

Ya sabemos que $V(f)$ es singular en el origen, donde es un punto doble con cono tangente formado por las rectas $V(x)$ y la recta $V(x + y)$.

Ahora, si x es un infinitesimal de orden m , y y es un infinitesimal de orden n , entonces tenemos que:

- x^4 es un infinitesimal de orden $4m$;
- y^4 es un infinitesimal de orden $4n$;
- x^2 es un infinitesimal de orden $2n$;
- xy es un infinitesimal de orden $m + n$.

Para que un punto sea solución de f cerca del origen, sus coordenadas deben tener órdenes de infinitesimales tales que:

1. al menos dos de los monomios tienen el mismo orden de infinitesimal, de modo que los valores de dos monomios se cancelarán;
2. todos los demás monomios tienen un orden superior de infinitesimal y, por lo tanto, desempeñan un papel irrelevante en la ecuación.

En el ejemplo anterior, tenemos:

m=1, n=1 :

$$\text{ord}(x^2) = \text{ord}(xy) = 2 < 4 = \text{ord}(x^4) = \text{ord}(y^4).$$

Luego, la ecuación se puede aproximar por $x^2 + xy = x(x + y)$. Factorizando x , que es un múltiplo general y por lo tanto no contribuye al equilibrio de los infinitesimales, obtenemos la recta $V(x + y)$, que de hecho es una de las rectas del cono tangente.

m=3, n=1 :

$$\text{ord}(y^4) = \text{ord}(xy) = 4 < 6 = \text{ord}(x^2) < 12 = \text{ord}(x^4).$$

Luego, la ecuación se puede aproximar mediante $y^4 + xy = y(y^3 + x)$. Factorizando y , obtenemos la curva $V(x + y^3)$; esta curva determina la otra recta tangente del cono tangente, y nos da información más refinada al decir que la rama de nuestra curva con tangente vertical se parece al punto de inflexión en el gráfico de una función cúbica.

Existe un buen método combinatorio para encontrar cuáles son las ramas aproximadas, el *método del polígono de Newton*, que describimos aquí y pedimos su demostración en los Ejercicios.

Para cada monomio que tiene un coeficiente distinto de cero en el polinomio f , trace su vector exponente en el cuadrante positivo del plano. Considere la envolvente convexa inferior de los puntos que trazó y observe sus segmentos de borde que se cruzan con el interior del cuadrante (es decir, ignore aquellos que concuerdan con una parte del eje x o y). Cada uno de estos segmentos contiene al menos dos de los puntos que se trazaron. Para cada segmento, los monomios en f cuyos vectores exponentes pertenecen al segmento determinan, después de eliminar los factores comunes de x e y , una aproximación para una rama de la curva cerca del punto singular.

2.5 Ejercicios

Ejercicio 2.1. Considere el cono en \mathbb{R}^3 definido como $X = \{x^2 + y^2 = z^2\}$. Demuestre que al elegir adecuadamente los planos Π que no pasan por el origen, se puede obtener un círculo, una elipse, una parábola o una hipérbola como intersección $X \cap \Pi$.

Ejercicio 2.2. Describa algunas propiedades geométricas de las cónicas (por ejemplo, simetrías, puntos distinguidos...) y vea si puede presenciarlas y describirlas a través de las ecuaciones.

Ejercicio 2.3. Demuestre que la ecuación de cualquier cónica se puede representar mediante una matriz simétrica. Desde esta perspectiva, ¿cómo afecta un cambio proyectivo de coordenadas a la ecuación de una cónica?

Ejercicio 2.4. Considere dos puntos p, q en el plano (que puede elegir que sean $(\pm a, 0)$ para simplificar un poco su vida). Demuestre que el lugar geométrico de todos los puntos r en el plano tales que la suma de las distancias a p y q es constante es una elipse. Demuestre que el lugar geométrico de todos los puntos r en el plano tal que la diferencia de las distancias a p y q es constante es una hipérbola.

Ejercicio 2.5. Demuestre que $V(fg) = V(f) \cup V(g)$. De esta identidad se deduce que una curva algebraica $V(f)$ es irreducible si y solo si el polinomio f es irreducible, y se reduce si la factorización prima de f no contiene factores repetidos.

Ejercicio 2.6. Demuestre que salvo por un cambio afín de coordenadas, cualquier cónica real afín es equivalente a una de las siguientes:

elipse: $x^2 + y^2 = 1$;

parábola: $y = x^2$;

hipérbola: $x^2 - y^2 = 1$;

dos rectas incidentes: $xy = 0$;

dos rectas paralelas: $x^2 - x = 0$;

doble recta: $x^2 = 0$.

Ejercicio 2.7. Demuestre que cualquier curva proyectiva C da lugar de forma natural a una superficie en \mathbb{A}_k^3 llamada el **cono afín** de C . ¿Por qué cree que se llama cono?

Ejercicio 2.8. Demostrar que las parametrizaciones proyectivas y afines de una curva son esencialmente equivalentes (en el sentido de que existen procedimientos naturales que van de una perspectiva a otra). Demuestre que la imagen de una parametrización es una curva algebraica. Sugerencia: es más fácil trabajar con parametrizaciones proyectivas.

Ejercicio 2.9. Dada una cónica suave afín real $V(f)$, ¿cómo se puede saber si es una elipse, una parábola o una hipérbola al observar su clausura proyectiva? En la práctica, ¿cómo se realiza este proceso algebraicamente?

Ejercicio 2.10. Demuestre que todas las cónicas reales suaves son proyectivamente equivalentes. Sugerencia: reduzca el problema a un hecho de álgebra lineal.

Ejercicio 2.11. Demuestre que para una curva proyectiva $V(F)$, ser suave equivale a

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial X} = \frac{\partial F}{\partial Y} = \frac{\partial F}{\partial Z} = 0 \right\} = \emptyset$$

Demuestre que la recta tangente en un punto $P = (X_0 : Y_0 : Z_0)$ está dada por la ecuación

$$X \frac{\partial F}{\partial X|_P} + Y \frac{\partial F}{\partial Y|_P} + Z \frac{\partial F}{\partial Z|_P} = 0.$$

Ejercicio 2.12. Describe la ecuación de una cónica mediante una matriz simétrica A como en el Ejercicio 2.3. ¿Qué propiedad de la matriz A detecta la suavidad de la cónica?

Ejercicio 2.13. Pensemos en por qué la homogenización y la deshomogenización no son exactamente inversas entre sí. ¿Cuál es la condición geométrica para una curva proyectiva $V(F)$ que hace que la curva obtenida de la homogenización de la dehomogenización de F no sea $V(F)$?

Ejercicio 2.14. Demuestre que si se reduce una curva $V(f)$, entonces puede tener infinitos puntos singulares. Describa el conjunto de puntos singulares en términos de la factorización prima de f .

Ejercicio 2.15. Encuentre los puntos singulares, calcule sus multiplicidades y su cono tangente, para la curva.

$$V(-x^4 + x^3y + xy^2 - y^3).$$

Ejercicio 2.16. Utilice el método del polígono de Newton para aproximar $V(x^{13} + x^8y^2 + 6x^5y^6 + xy^9 + y^{13})$ cerca del origen. Compruebe que su descripción sea compatible con la descripción del cono tangente.

Ejercicio 2.17. Demuestre que el método del polígono de Newton de hecho detecta las condiciones de los infinitesimales descritas en la lección. Analice cuándo el método de Newton no produce curvas binomiales.

Lección 3

Cómo se intersecan las curvas

Hoy nos centraremos en cómo se pueden intersecar dos curvas planas. Las líneas se cruzan en un solo punto, y eso está muy bien. Pero si consideramos la recta $\ell = V(y)$ y la parábola $C = V(y - x^2)$, mientras sigue siendo el caso que solo hay un punto de intersección $\ell \cap C = \{(0, 0)\}$, hay algunas señales de advertencia de que algo anda mal:

1. Las rectas tangentes de las dos curvas en el punto de intersección concuerdan, por lo que la intersección de las aproximaciones lineales de las dos curvas ya no es un punto sino infinitos.
2. Si perturbamos la línea un poco, digamos de $y = 0$ a $y = \epsilon^2$, para un número muy pequeño ϵ , ahora tenemos dos puntos de intersección $(\pm\epsilon, \epsilon^2)$. En particular, si imaginamos que la línea se ha movido continuamente desde la altura cero hasta ϵ^2 , entonces el único punto de intersección de $\ell \cap C$ parece haber generado dos intersecciones distintas.
3. Si en lugar de eso mueves la línea hacia abajo, a $y = -\epsilon^2$, de repente no tenemos puntos de intersección. Así que una deformación continua de la situación ha hecho que el punto de intersección desaparezca.

Abordamos inmediatamente el último punto de la siguiente manera: aunque continuaremos dibujando en el plano real, que es el único que podemos representar, a partir de ahora trabajaremos sobre los números complejos (los aficionados al álgebra pueden sustituir esto por cualquier cuerpo algebraicamente cerrado). Debido al teorema fundamental del álgebra, cualquier ecuación polinomial en una variable tiene el número esperado de soluciones...

¿o no? Incluso en este caso, para que el enunciado del teorema fundamental del álgebra funcione sin problemas debemos contar las raíces de un polinomio con su multiplicidad. Esto sugiere que las intersecciones de curvas también deberían venir con un invariante local llamado multiplicidad de intersección. Nuestro objetivo hoy es presentar este concepto de dos diferentes maneras. En lugar de elegir una perspectiva única y desarrollar una presentación matemáticamente estricta desde esa perspectiva, resaltaremos la intuición entre las dos perspectivas y sus interconexiones.

3.1 Intersección transversal

Empezamos con los puntos de intersección más bonitos, aquellos que seguramente querremos contar con multiplicidad uno.

Definición 3.1. Un punto $p \in C_1 \cap C_2$ es un punto de intersección **transversal** si p es un punto suave de ambas curvas, y la recta tangente a C_1 en p es diferente de la recta tangente a C_2 en p .

Si elegimos coordenadas de modo que $p = (0, 0)$, entonces p es un punto de intersección transversal para $V(f_1)$ y $V(f_2)$ si y solo si para $i = 1, 2$:

$$f_i(x, y) = a_i x + b_i y + \tilde{f}_i(x, y),$$

donde cada monomio de $\tilde{f}_i(x, y)$ tiene grado al menos dos, y $a_1 b_2 \neq a_2 b_1$.

3.2 ¿Qué queremos de la multiplicidad?

Antes de embarcarnos en un montón de definiciones, detengámonos por un segundo para reflexionar sobre qué tipo de propiedades nos gustaría obtener de la teoría que estamos por establecer.

Dado un punto p en el plano y dos curvas planas C_1, C_2 , aquí hay algunas propiedades que deseamos para la multiplicidad de intersección (aún por definir)

$$m_p(C_1, C_2)$$

tener.

simetría:

$$m_p(C_1, C_2) = m_p(C_2, C_1)$$

Si bien esto puede parecer una petición obvia, en realidad no lo es. De hecho, se pueden establecer teorías muy naturales en las que se elimine esta condición o se reemplace con anti-invariancia... pero esta es otra historia.

invariancia bajo cambio de coordenadas: si Φ es un cambio de coordenadas afín o proyectivo,

$$m_p(C_1, C_2) = m_{\Phi(p)}(\Phi(C_2), \Phi(C_1)).$$

intersección vacía: si $p \notin C_1 \cap C_2$, entonces

$$m_p(C_1, C_2) = 0.$$

intersecciones transversales: si p es un punto de intersección transversal, entonces

$$m_p(C_1, C_2) = 1.$$

aditividad: esperamos aditividad bajo la unión, es decir:

$$m_p(C_1, C_2 \cup C_3) = m_p(C_1, C_2) + m_p(C_1, C_3)$$

teorema fundamental del álgebra: si $C_1 = V(y)$ y $C_2 = V(y - x^n)$, entonces

$$m_p(C_1, C_2) = n.$$

invariancia de deformación: Escoja un vecindario abierto U_p del punto p tal que $C_1 \cap C_2 \cap U_p = \{p\}$ (p es el único punto de intersección de los dos curvas en el vecindario). Considere una deformación continua de C_2 dependiendo de un parámetro t , es decir, $C_2(0) = C_2$ y los coeficientes de $C_2(t)$ son funciones continuas de t . Entonces existe un ϵ tal que para cualquier t con $-\epsilon < t < \epsilon$

$$m_p(C_1, C_2) = \sum_{q \in U_p} m_q(C_1, C_2(t)).$$

En la siguiente sección describimos dos formas diferentes de definir una noción de multiplicidad de intersección. No tendremos el tiempo ni la energía para demostrar completamente que las dos formas son equivalentes o que cada forma satisface todas estas propiedades, porque ese sería un curso entero de un semestre. Pero con suerte saldremos con una buena intuición.

3.3 Definiciones de multiplicidad

3.3.1 Algebraica

La primera definición de multiplicidad de intersección que damos es puramente algebraica. Comenzamos definiendo un anillo de funciones en el plano que tiene la propiedad de explorar solo la geometría del plano cerca del origen.

Definición 3.2. El **anillo local** de \mathbb{A}_k^2 en el origen, denotado $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^2, \mathbf{0}}$, viene dado por:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^2, \mathbf{0}} = \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in k[x, y], g(0, 0) \neq 0 \right\}.$$

El anillo local tiene un único ideal maximal $\mathfrak{M} = \langle x, y \rangle$, que consta de todas las funciones que desaparecen en el origen y, por lo tanto, no puede ser (multiplicativamente) invertibles. El orden de cancelación de una función en el origen se detecta por la potencia del ideal maximal en el que se encuentra.

Definición 3.3. Dadas dos curvas $V(f_1), V(f_2)$, definimos su multiplicidad de intersección en el origen como:

$$m_{\mathbf{0}}(V(f_1), V(f_2)) = \dim_k \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^2, \mathbf{0}}}{\langle f_1, f_2 \rangle}.$$

Observamos en primer lugar que si $\mathbf{0}$ no está en la intersección de las dos curvas, entonces la multiplicidad es 0: digamos por ejemplo que $\mathbf{0}$ no pertenece a $V(f_1)$. Esto significa $f_1(0, 0) \neq 0$, lo que significa que f_1 es invertible en el anillo local y, por lo tanto, $\langle f_1, f_2 \rangle = \langle 1 \rangle = \mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^2, \mathbf{0}}$, y por lo tanto el cociente tiene dimensión cero.

En los ejercicios se comprobarán algunas de las propiedades que describimos en la sección anterior. Por ahora, creamos que ésta es una buena definición (en el sentido de que tiene todas las propiedades anteriores) y veamos un poco de cómo trabajar con ella.

Ejemplo 3.4 (Intersección con una recta). Sea $f_1 = y$ y f_2 un polinomio arbitrario que no es múltiplo de y . Entonces

$$\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^2, \mathbf{0}}}{\langle y, f_2 \rangle} = \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^1, \mathbf{0}}}{\langle f_2(x, 0) \rangle} = \langle 1, x, \dots, x^{m-1} \rangle_k,$$

donde m es tal que el primer coeficiente distinto de cero de $f_2(x, 0)$ es x^m . Se deduce inmediatamente entonces que

$$m_{\mathbf{0}}(V(y), V(f_2)) = m.$$

Ejemplo 3.5. Ahora calculemos un ejemplo más complicado. Sean $f_1 = y^2 - x^3$ y $f_2 = y^3 - x^2$.

Lo bueno de los ideales es que a menudo se puede considerar el mismo ideal de diferentes maneras, es decir, usando diferentes generadores, y eso puede simplificar considerablemente la vida. Observemos este principio en acción:

$$\langle y^2 - x^3, y^3 - x^2 \rangle = \langle y^2 - x^3, y^3 - x^2 - y(y^2 - x^3) \rangle = \langle y^2 - x^3, (yx - 1)x^2 \rangle$$

Así, hemos sustituido la segunda curva cúspidal irreducible por una curva reducible que consta de dos copias del eje y y la cónica $yx - 1$. Ahora podemos calcular fácilmente:

$$m_{\mathbf{0}}(V(y^2 - x^3), V(x)) = 2,$$

$$m_{\mathbf{0}}(V(y^2 - x^3), V(yx - 1)) = 0,$$

y luego usando la aditividad de la multiplicidad obtenemos:

$$m_{\mathbf{0}}(V(y^2 - x^3), V(y^3 - x^2)) = 2 \cdot 2 + 0 = 4.$$

3.3.2 Analítica

La segunda perspectiva que adoptamos es más analítica. Si pensamos que la ecuación de una de las curvas define una función, entonces podemos restringir esta función a la otra curva y calcular su orden de cancelación en el punto donde queremos calcular la multiplicidad de intersección. Si bien esta descripción es suficiente para hacer una buena definición, en la práctica para poder calcular multiplicidades de esta manera, se debe poder parametrizar una de las curvas. Como mencionamos antes, no todas las curvas se pueden parametrizar, pero uno puede usar una parametrización local (posiblemente mediante funciones analíticas en lugar de algebraicas) o puede parametrizar una aproximación suficientemente buena de la curva. No profundizaremos en los aspectos técnicos de estas ideas, solo mostraremos algunos ejemplos en acción.

Definición 3.6. Considere dos curvas $V(f_1), V(f_2)$ y un punto $p \in V(f_2) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$. Definimos:

$$m_p(V(f_1), V(f_2)) = \text{ord}_p(f_1|_{V(f_2)}),$$

Definimos la multiplicidad como 0 si p no pertenece a ninguna de las curvas.

Observación 3.7. Es necesario tener un poco de cuidado al definir la noción de orden de cancelación de una función, especialmente cuando p es un punto singular de la curva. Adoptamos nuevamente la táctica de mostrar el camino con algunos ejemplos en lugar de embarcarnos en una discusión general potencialmente confusa.

Ejemplo 3.8 (Intersecciones con una línea). Sea f_1 un polinomio arbitrario que no es múltiplo de y y $f_2 = y$. Queremos calcular la multiplicidad de la intersección en el origen. Parametrizamos la línea $V(f_2)$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases}$$

Pensamos en t como una coordenada local para la línea cerca del origen. Para restringir la función $f_1(x, y)$ a la línea, simplemente conectamos la parametrización y obtenemos una función de t :

$$f_1(x, y)|_{V(y)} = f_1(t, 0).$$

Entonces, el orden de cancelación de $f_1(t, 0)$ en $t = 0$ es el número entero m tal que el primer coeficiente distinto de cero de $f_1(t, 0)$ es t^m . Se deduce inmediatamente entonces que

$$m_{\mathbf{0}}(V(f_1), V(y)) = m.$$

Ejemplo 3.9. Ahora calculamos el ejemplo más complicado de la sección anterior. Sea $f_1 = y^2 - x^3$ y $f_2 = y^3 - x^2$. Parametrizamos la curva cúspide $V(f_2)$ de la siguiente manera:

$$\varphi(t) := \begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^2 \end{cases}$$

Si bien t no es una coordenada local para la curva cerca del origen porque la curva es singular allí, es una coordenada local para la línea que la parametriza. Luego interpretamos la idea de *restringir la función* $f_2(x, y)$ como *pull-back mediante la parametrización* para obtener una función de t :

$$\varphi^*(f_2(x, y)) = f_2(t^3, t^2) = t^9 - t^4.$$

Esta es una función de t que se cancela en orden 4 en $t = 0$, y por lo tanto

$$m_{\mathbf{0}}(V(y^2 - x^3), V(y^3 - x^2)) = 4.$$

Del ejemplo anterior aprendemos que una función binomial siempre se puede parametrizar. El método del polígono de Newton del apartado anterior, en muchas situaciones, nos permite aproximar las ramas de una curva cerca de un punto singular mediante curvas definidas por un binomio. Esta es a menudo (aunque hacer esta declaración precisa requeriría algo de trabajo) una aproximación suficientemente buena de nuestra curva y, por lo tanto, podemos calcular una gran clase de multiplicidades de intersección de esta manera.

3.4 Ejercicios

Ejercicio 3.1. Demuestre que los puntos de intersección transversal y vacía satisfacen la invariancia de deformación.

Ejercicio 3.2. Piense en lo que implicaría demostrar que las propiedades de la multiplicidad de intersección de la Sección 3.2 son satisfechas por la multiplicidad como en la definición 3.3. Intente descubrir cuáles son más fáciles y cuáles son más difíciles de demostrar.

Ejercicio 3.3. Utilice la definición algebraica de multiplicidad (definición 3.3) para calcular la multiplicidad de intersección en el origen de las curvas $V(y^m - x^n)$, $V(y^r - x^s)$ para m, n, r, s números naturales arbitrarios.

Ejercicio 3.4. Piense en lo que implicaría demostrar que las propiedades de la multiplicidad de intersección de la Sección 3.2 se satisfacen con la multiplicidad como en la definición 3.6. Intente descubrir cuáles son más fáciles y cuáles son más difíciles de demostrar.

Ejercicio 3.5. Utilice la definición analítica de multiplicidad (definición 3.6) para calcular la multiplicidad de intersección en el origen de las curvas $V(y^m - x^n)$, $V(y^r - x^s)$ para m, n, r, s números naturales arbitrarios.

Ejercicio 3.6. Calcule la multiplicidad de la intersección en el origen:

$$m_{\mathbf{0}}(V(x^{13} + x^8y^2 + 6x^5y^6 + xy^9 + y^{13}), V(y^2 - x^2 + x^3)).$$

Sugerencia: utilice el método del polígono de Newton para aproximar las ramas cerca del origen de una de las curvas.

Lección 4

Bézout y aplicaciones

Hoy desviamos nuestra atención de las propiedades locales para investigar el comportamiento global de la intersección entre curvas. El resultado principal es el teorema de Bézout, que calcula el número total de puntos de intersección (contados con multiplicidad) de dos curvas en términos de sus grados. Luego vemos algunas aplicaciones interesantes.

4.1 Teorema de Bézout

Presentemos de inmediato al héroe de la lección de hoy.

Teorema 4.1 (Bézout). *Sean $C_1 = V(F_1), C_2 = V(F_2)$ dos curvas planas proyectivas complejas, y sean $d_1 = \deg(F_1), d_2 = \deg(F_2)$. Si C_1 y C_2 no tienen un componente común (y por lo tanto se cruzan en un número finito de puntos), tenemos:*

$$|C_1 \cap C_2|_m := \sum_{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2} m_p(C_1, C_2) = d_1 \cdot d_2.$$

Proporcionamos dos bocetos de pruebas. El primero supone la invariancia de deformación de los índices de multiplicidades, que se explorará en los Ejercicios. El otro es puramente algebraico y, si bien es (casi) completamente elemental, requiere algunos lemas de álgebra conmutativa que también se incluyen en los Ejercicios.

Prueba 1. Esta primera prueba se desarrolla en dos pasos. Primero observamos que si una de las dos curvas es una recta, entonces el teorema de Bézout

es equivalente al teorema fundamental del álgebra. Elija una parametrización de la línea ℓ (solo preste atención para no elegir una donde $t = \infty$ dé un punto de intersección de la línea con C_2) y haga un pull-back de F_2 a través de esta parametrización. Se obtiene un polinomio de grado d_2 en t , cuyas raíces corresponden a los puntos de intersección de $C_1 \cap C_2$. Además, según nuestra definición analítica de multiplicidad de intersección, esto concuerda con la multiplicidad algebraica de las raíces. Entonces, el teorema fundamental del álgebra nos dice que un polinomio con coeficientes complejos de grado d_2 siempre tiene d_2 raíces con multiplicidades.

Para el segundo paso, deformamos C_1 a una unión de líneas y luego aplicamos el paso uno. Sea $G = \prod_{i=1}^{d_1} (a_i X + b_i Y + c_i Z)$ y considere la familia de curvas

$$C_1(t) = (1 - t)F_1 + tG.$$

Tenga en cuenta que podemos reformular la idea de invariancia de multiplicidad en esta forma equivalente: para cada t_0 existe un ϵ tal que para cualquier $t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon$

$$\sum_{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2} m_p(C_1(t), C_2) = \sum_{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2} m_p(C_1(t_0), C_2).$$

Esto muestra que la función $\tau(t) = \sum_{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2} m_p(C_1(t), C_2)$ es localmente constante en el intervalo $[0, 1]$. Como el intervalo es conexo y los números naturales son un conjunto discreto, la función es constante. Por lo tanto, se puede calcular el número total (ponderado) de intersecciones entre $C_1 = C_1(0)$ y C_2 , calculando en su lugar el número total de intersecciones de $C_1(1)$ y C_2 . Dado que $C_1(1)$ consta de d_1 líneas, al aplicar el paso anterior tenemos

$$|C_1 \cap C_2|_m = d_1 \cdot d_2.$$

□

Prueba 2. En cambio, esta prueba procede con una serie de resultados simples de álgebra conmutativa. Primero supongamos que elegimos un sistema de coordenadas proyectivas de tal manera que no haya puntos de intersección de C_1 y C_2 en la recta al infinito (ver Ejercicio 4.6). Entonces basta con contar los puntos de intersección de las curvas afines obtenidas al deshomonizar F_1 y F_2 . Sea $f_i = F_i(x, y, 1)$.

Lema 4.2. *El morfismo natural:*

$$\frac{\mathbb{C}[x, y]}{\langle f_1, f_2 \rangle} \rightarrow \bigoplus_{p \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2, p}}{\langle f_1, f_2 \rangle} \quad (4.1)$$

es un isomorfismo.

□

De ello se deduce que la suma total de las multiplicidades de intersección, que es por definición la dimensión del lado derecho de (4.1), es igual a la dimensión del lado izquierdo de (4.1).

Denota por f_{i, d_i} la parte del polinomio f_i que consta de monomios de grado máximo. También lo llamaremos la *parte inicial* de f_i .

Observamos que asumir que C_1 y C_2 no se cruzan a lo largo de la recta en el infinito es equivalente a que f_{1, d_1} y f_{2, d_2} no tengan ningún factor común (ver Ejercicio 4.7).

Lema 4.3. *Denotemos $C[x, y]_{\leq d}$ al espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a d . Para cualquier d suficientemente grande (en particular si $d \geq d_1 + d_2$), la siguiente es una sucesión exacta de espacios vectoriales:*

$$0 \rightarrow C[x, y]_{\leq d-d_1-d_2} \xrightarrow{\alpha} C[x, y]_{\leq d-d_1} \oplus C[x, y]_{\leq d-d_2} \xrightarrow{\beta} C[x, y]_{\leq d} \rightarrow \frac{\mathbb{C}[x, y]}{\langle f_1, f_2 \rangle} \rightarrow 0,$$

donde los mapas α y β se definen de la siguiente manera:

$$\alpha(h) = (h \cdot f_2, -h \cdot f_1),$$

$$\beta(k_1, k_2) = f_1 k_1 + f_2 k_2.$$

Por el Lema 4.3 podemos calcular la dimensión de $\frac{\mathbb{C}[x, y]}{\langle f_1, f_2 \rangle}$ como la suma alternante de las dimensiones de los espacios vectoriales anteriores, y podemos calcular que esto es $d_1 \cdot d_2$ usando la identidad del Ejercicio 4.9.

4.2 Racionalidad de las curvas

La primera aplicación del teorema de Bézout que mostramos es que en ciertos casos nos dice que una curva puede parametrizarse. Aquí está el primer ejemplo.

Teorema 4.4. *Cualquier cónica suave en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ es isomorfa a \mathbb{P}^1 .*

Prueba. Sea C una cónica suave y elija (de la manera que quiera) un punto $p \in C$. Para cualquier t , considere la línea ℓ_t que pasa por p con pendiente t (permitiendo que t sea igual a ∞). Denote por t_{tang} la pendiente de la recta tangente a C en p . La función $\varphi : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow C$ que asigna a cualquier $t \neq t_{tang}$ el punto de intersección $\ell_t \cap C$ que no es p , y p a $t = t_{tang}$, es inyectiva y sobreyectiva, y proporciona un isomorfismo con \mathbb{P}^1 . \square

Teorema 4.5. *Cualquier cúbica irreducível en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ con un punto doble es racional.*

Prueba. Sea p un punto doble de una curva cúbica C . Para cualquier t , considere la línea ℓ_t que pasa por p de pendiente t (permitiendo que t sea igual a ∞). Según el teorema de Bézout cualquier recta ℓ_t debe intersecar a C en tres puntos (contados con multiplicidades), pero como p cuenta siempre con una multiplicidad de al menos 2, genéricamente solo habrá otro punto de intersección distinto de p .

Considere la función $\varphi : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow C$ definida de la siguiente manera:

$$\varphi(t) = \begin{cases} (\ell_t \cap C) \setminus p & \text{si } \ell_t \text{ no está en el cono tangente a } C \text{ en } p \\ p & \text{si } \ell_t \text{ está en el cono tangente a } C \text{ en } p. \end{cases}$$

Así, la función definida da una parametrización de la cúbica nodal. \square

La siguiente afirmación es la generalización natural de las dos anteriores.

Teorema 4.6. *Si C es una curva algebraica plana de grado d con un punto $(d-1)$ -tuplo, entonces C es racional.*

Prueba. Ejercicio 4.11 \square

4.3 Cotas del número de puntos singulares

Otra serie de aplicaciones del teorema de Bézout da un límite al número de puntos singulares de curvas algebraicas.

Teorema 4.7. *Una cúbica plana singular irreducível puede tener como máximo un punto doble. Para ser precisos, estamos descartando la posibilidad de más de un punto singular y la posibilidad de un solo punto de multiplicidad mayor que 2.*

Prueba. Sea C una cúbica y suponga una de las dos situaciones siguientes:

- C tiene dos puntos singulares que llamamos p y q ;
- C tiene un punto de multiplicidad de al menos tres, llamemoslo p ; entonces sea q un otro punto de C .

Considere la línea ℓ que une p y q , y la intersección $\ell \cap C$. Por el teorema de Bézout $|\ell \cap C|_m = 3$. Por otro lado, en ambas situaciones la suma de las multiplicidades locales de intersección en p y q es estrictamente mayor que 3, lo que genera una contradicción. \square

Aquí está la generalización natural de este hecho.

Teorema 4.8. *Una curva de grado d no puede tener más de $\binom{d-1}{2}$ puntos singulares.*

Prueba. Demostremos esto por contradicción. Supongamos que C tiene $\binom{d-1}{2} + 1$ puntos singulares y demostremos que contradecimos el teorema de Bézout. Necesitamos el siguiente enunciado, cuya demostración se asigna como el Ejercicio 4.13.

Hecho 4.9. *Elija cualesquiera $\binom{n}{2} - 1$ puntos en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Existe una curva de grado $n - 2$ que los contiene.*

Elija $d - 3$ puntos en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ distintos de los puntos singulares de C , de modo que junto con los puntos singulares tenga $\binom{d}{2} - 1$ puntos. Por el Hecho 4.9 existe una curva X de grado $d - 2$ que pasa por todos los puntos. Ahora, por el teorema de Bézout tenemos:

$$|C \cap X|_m = d(d - 2). \quad (4.2)$$

Por otro lado, podemos limitar el número total de intersecciones sumando los límites individuales de todas las multiplicidades locales, para obtener:

$$|C \cap X|_m \geq 2 \cdot \left(\binom{d-1}{2} + 1 \right) + d - 3 = d(d - 2) + 1 \quad (4.3)$$

Observando que (4.2) y (4.3) se contradicen concluye la prueba. \square

4.4 Género de una curva suave

La última aplicación del teorema de Bézout es la más sofisticada, pero también la más interesante, ya que en particular nos muestra que la mayoría de las curvas no pueden parametrizarse. Nos basamos en algunos hechos provenientes de análisis complejo.

Hecho 4.10. *Cualquier curva suave, proyectiva, plana y compleja es una superficie topológica orientable. Por lo tanto, es topológicamente equivalente a un toro con g huecos, y el número de huecos se llama **género** de la curva.*

Introducimos otra fórmula interesante, que probaremos en el Ejercicio 4.15 usando topología.

Hecho 4.11 (fórmula de Riemann-Hurwitz). *Sea C una curva proyectiva, compleja, suave, de grado d y género g , y $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ que no está en C . Para cualquier punto $q \neq p$, llame $\ell_{p,q}$ a la línea que contiene los dos puntos. Entonces tenemos:*

$$\sum_{q \in C} (m_q(\ell_{p,q}, C) - 1) = 2g + 2d - 2. \quad (4.4)$$

Con estos hechos, podemos enunciar y demostrar nuestro teorema principal.

Teorema 4.12. *Una curva proyectiva suave, plana y compleja C de grado d tiene género $\binom{d-1}{2}$.*

En particular, dado que $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ es isomorfo a una línea y, por lo tanto, tiene género 0, cualquier curva suave de grado mayor que 2 no puede parametrizarse, porque tiene género positivo. Hagamos ahora un boceto de demostración de este teorema.

Prueba. Elija una línea L que interseque a C en d -puntos distintos y elija un punto $p \in L \setminus C$. Ahora elija un sistema de coordenadas proyectivas tal que L sea la recta en el infinito y $p = (0 : 1 : 0)$. Sea f una ecuación afín para $C \cap (\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus L)$. Observamos que

$$\sum_{q \in C \cap L} (m_q(\ell_{p,q}, C) - 1) = 0,$$

por lo tanto podemos concluir que

$$\sum_{q \in C} (m_q(\ell_{p,q}, C) - 1) = \sum_{q \in C \setminus L} (m_q(\ell_{p,q}, C) - 1).$$

La siguiente observación es que para cualquier punto $q \in C$ tenemos

$$m_q(\ell_{p,q}, C) - 1 = m_q \left(V \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), C \right)$$

Sea $\frac{\partial F}{\partial Y}$ la homogenización de $\frac{\partial f}{\partial y}$. Tenga en cuenta que como elegimos $(0 : 1 : 0) = p \notin C$, ninguno de los puntos de intersección de C y $\frac{\partial F}{\partial Y}$ se encuentran en la recta del infinito. Luego podemos aplicar el teorema de Bézout para obtener:

$$\sum_{q \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus L} m_q \left(V \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), C \right) = \sum_{q \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2} m_q \left(V \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right), C \right) = d \cdot (d - 1).$$

Finalmente hemos demostrado que

$$2g + 2d - 2 = \sum_{q \in C} (m_q(\ell_{p,q}, C) - 1) = d \cdot (d - 1).$$

Despejando g en la ecuación anterior nos permite concluir la prueba del teorema. \square

4.5 Ejercicios

Ejercicio 4.1. Describa cuántos puntos de intersección pueden tener dos cónicas afines. Compárese con el caso proyectivo controlado por el teorema de Bézout.

Ejercicio 4.2. Demuestre que una curva proyectiva suave $C = V(F)$ es una variedad analítica compleja de dimensión 1. Sugerencia: use el teorema de la función inversa.

Ejercicio 4.3. Sea $\varphi : C \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ una función holomorfa de variedades analíticas y $p \in C$. Demuestre que siempre se pueden elegir las coordenadas locales z alrededor de p y w alrededor de $\varphi(p)$ de modo que la expresión analítica

local de φ sea $w = z^{k_p}$, donde k_p se llama **orden de ramificación** de φ en p . Demuestre que para cualquier $q \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, la cantidad

$$\sum_{p \in \varphi^{-1}(q)} k_p$$

es una constante llamada **grado** de φ .

Ejercicio 4.4. Sea $C = V(F)$ una curva proyectiva (supongamos que sea suave por simplicidad), y $G(X, Y, Z), H(X, Y, Z)$ dos polinomios homogéneos de grado k sin factores en común con F . Demuestre que G/H define una función holomorfa de C a $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.

Ejercicio 4.5. Complete los detalles de la *Prueba 1* del teorema de Bézout.

Ejercicio 4.6. Dada una curva proyectiva reducida C de grado d , demuestre que siempre se puede encontrar una recta L que la corte en d puntos distintos. De hecho, demuestre que si elige una línea al azar, esto sucederá con probabilidad uno.

Ejercicio 4.7. Sean $C_1 = V(f_1)$ y $C_2 = V(f_2)$ dos curvas proyectivas y elija un sistema de coordenadas proyectivas que definan una recta en el infinito L . Mostrar que $C_1 \cap C_2 \cap L = \emptyset$ es equivalente a que f_{1,d_1} y f_{2,d_2} no tengan un factor común, donde f_{i,d_i} denota la parte del polinomio de grado máximo.

Ejercicio 4.8. Demuestre el Lema 4.3.

Ejercicio 4.9. Muestre que

$$\dim_k k[x, y]_{\leq d} = \binom{d+2}{2}.$$

Ejercicio 4.10. Escriba explícitamente una parametrización para la cúbica nodal $V(y^2 - x^2 + x^3)$ y para la cúbica cúspidal $V(y^2 - x^3)$. Explique por qué estas parametrizaciones no dan un isomorfismo con $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.

Ejercicio 4.11. Demuestre el teorema 4.6.

Ejercicio 4.12. Demuestre que cualquier curva plana proyectiva de grado 9 con 4 nodos es racional.

Ejercicio 4.13. Dados $\binom{d+2}{2} - 1$ puntos en \mathbb{P}_k^2 , demuestre que se puede encontrar una curva de grado d que los contenga.

Ejercicio 4.14. Demuestre el Hecho 4.10.

Ejercicio 4.15. Demuestre la fórmula de Riemann-Hurwitz (Hecho 4.11) de la siguiente manera. Considere (la restricción de la) proyección desde el punto p de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ como una función φ de C a $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Considere una triangulación de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ que contiene la imagen de todos los puntos q donde la multiplicidad de intersección $m_1(\ell_{p,q}, C) > 1$. Utilice la imagen inversa de esta triangulación mediante ϕ para calcular la característica de Euler de C . Luego imponga la igualdad con $2 - 2g$ para obtener la fórmula.

Part II
English

Foreword

Algebraic geometry is by nature an interdisciplinary part of mathematics. Algebra is used as a way to describe geometric objects, and to systematize the computation of geometric properties. Geometry provides intuition and *visuals* (in a rather abstract sense) to organize algebraic structure. It is a very vast field, that ranges from extreme abstraction (thanks, Grothendieck) to extremely applicable (see e.g. computational algebraic geometric methods to optimize the analysis of big data).

Whether you will want to position yourself somewhere within this range, or stay away from doing algebraic geometry professionally, as a mathematician it is important to have at least a high level perspective of how this dictionary is established.

Alas, algebraic geometry is seldom introduced to undergraduate students as it is considered too technical a field.

In this mini-course my goal is to give you a glimpse of some ideas in algebraic geometry through the study of plane curves, which are rather simple, yet already extremely interesting objects. In this case, the dictionary is provided by the *equation*, a single polynomial in two variables that identifies a locus of points in the plane (namely, the points whose coordinates cause the polynomial to vanish).

We see how we can read geometric properties of the curve through polynomial algebra. For example a curve cannot be decomposed as a union of simpler curves precisely when the polynomial giving the equation cannot be factored as a product of simpler polynomial.

Once we have made an acquaintance with algebraic curves, we set up a theory of intersection of curves. We see that, in order to obtain a well behaved theory, we need to count intersections with multiplicities. In analogy, think about how in algebra we count roots of a univariate polynomial with multiplicities in order to obtain the clean statement of the *fundamental*

theorem of algebra: any (complex) polynomial of degree d has exactly d roots.

The analogous statement in the theory of curves is Bézout's theorem, stating that any two (complex, projective) curves of degree d_1 and d_2 intersect in precisely $d_1 \cdot d_2$ points.

There are already (at least) two wonderful references that introduce, with care and detail, the theory of algebraic curves to an audience of undergraduates:

I. Vainsencher. *Introdução às Curvas Algébricas Planas.*

<https://impa.br/page-livros/introducao-as-curvas-algebricas-planas/>

A. Gathman. *Plane Algebraic Curves*

<https://agag-gathmann.math.rptu.de/en/curves.php>

I have read these resources, chose some aspects from either of them, and added a bit of my own perspective to write these notes. These notes are less polished and not completely self-contained, but what I tried to emphasize is the intuition and the thought process that goes into developing a mathematical theory. I tried to start by assuming very little, and I wanted to show that even mathematical notions that we think we have known all our lives can surprise us when we think about them with more sophisticated eyes: for example, what exactly is a plane? I have also tried to show multiple points of view that can be taken on a single concept (e.g. I gave two equivalent definitions of intersection multiplicity, one based on commutative algebra and the other on analysis).

I hope in the end that this course can prepare you for your first formal course in algebraic geometry, and will help demystify all the aura of mystery that surrounds the seemingly unending list of abstract definitions that one encounters. Most importantly, I hope you enjoy this course and will be wanting to return for more.

Pura vida!

Renzo Cavalieri

Lecture 1

Planes and lines

Today we discuss two mathematical objects that we have been familiar with for a long time: planes and lines. We will discover that a more sophisticated approach to these elementary ideas gives us multiple perspectives on what these words mean, and what their mathematical properties are.

1.1 Various types of planes

We all have an intuition about what the word *plane* means. It is some geometric object which extends indefinitely in two independent directions, and is completely flat.

Of course, nothing of the sort exists in nature. Our intuitive notion of plane abstracts and generalizes some experiential realities. For example, if an ant is dropped in the middle of a very large frozen lake, for all practical purposes it may consider its surroundings to be a plane.

Let us be a little more refined and make some formal definitions about what we mean by plane. In the process, we will find out that there could be more than one type of plane...

1.1.1 The Cartesian plane

The Cartesian plane is born from the intuition that, if we know how to measure distances and angles on this ideal object that we call plane, then by *choosing* two orthogonal axes we can construct two functions (usually called x and y , and also called *coordinate functions* or simply *coordinates*) from the

plane to the set of real numbers \mathbb{R} . Together, these two functions provide a bijection between the points of the plane, and the set of ordered pairs of real numbers. Further, we can use Pythagoras theorem to express the distance between any two points in terms of their coordinates.

Definition 1.1. The **Cartesian plane** is a geometric space P (i.e. a set whose elements we call points) together with two functions

$$x : P \rightarrow \mathbb{R},$$

$$y : P \rightarrow \mathbb{R},$$

called **coordinates**. The two coordinate functions combined give a bijection:

$$(x, y) : P \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Often this bijection is used to identify points in the plane with their images, and it is common to say that the cartesian plane *is* \mathbb{R}^2 , with the function x and y being the projections onto the two factors.

The distance between any two points $p_1, p_2 \in P$ is defined to be:

$$\text{dist}(p_1, p_2) := \sqrt{(x(p_2) - x(p_1))^2 + (y(p_2) - y(p_1))^2}.$$

Angles formed by choosing three points can also be defined in terms of algebraic expression of the coordinates of the points, but we leave this as an exercise.

This perspective allows us to connect our geometric intuition (which is unavoidably hard to make precise), to a well-defined algebraic object.

Question 1. *Since the definition of the coordinate functions depends on a choice of axes, can different choices of axes give rise to different coordinatizations for the same plane? How are these different systems of coordinates related?*

1.1.2 The affine plane

Now imagine that you relax your construction of the Cartesian plane in two ways:

1. you don't require the axes to be orthogonal;

2. you allow yourself to choose a point on each axis that you decide is going to be your unit of measure in that direction.

You still obtain a system of coordinates for your geometric plane, and the points in the plane are still in bijection with \mathbb{R}^2 .

The same plane can be given many system of coordinates, that are related one to the other by *affine transformations*, i.e. functions of the form:

$$\begin{cases} x_2 = a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + b_1 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + b_2, \end{cases} \quad (1.1)$$

where:

- $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ are two different systems of coordinates on the affine plane;
- the coefficients a_{ij}, b_i are real numbers subject to the condition that $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

When we consider the plane coordinatized with a system of affine coordinates (in particular equivalent to any other set of coordinates that differ by an affine transformation), we denote the plane by $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$.

Because of our physical intuition, we like to use real numbers to “measure” distances, and therefore coordinate functions take value in \mathbb{R} . However, nothing prevents us from having coordinate functions that take value in another field k . The affine plane thus obtained is denote \mathbb{A}_k^2 .

We will be especially interested in the affine plane over the complex numbers $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$, whose points are coordinatized by 2 complex numbers. Unfortunately it is common to call this the *complex plane*, even though this does not agree with what we call complex plane in analysis, which is just the field \mathbb{C} .

1.1.3 The projective plane

We now introduce a somewhat more sophisticated notion of plane, called the *projective plane*. The conceptual origins of this mathematical construction lie in the fact that we live in a three dimensional reality, but are only able to draw on a two dimensional canvas. So what we see in a photograph is a projection of three dimensional space in such a way that all points that are in a straight line with the camera end up smushed up together. A photo is a piece of plane that captures a projection of our $3d$ world. Now if you can

imagine an infinitely large film...well that is a plane on which we can project our $3d$ world on...but...even with the size of the photo being infinite, we are going to still miss just a sliver of our $3d$ world: the points that lie on rays through the eye of the camera that are parallel to the film. The perspective of the projective plane is that since our choice of placing the camera is rather arbitrary, these points should not be forgotten.

Let us work a little bit to make this intuition a bit more precise.

Definition 1.2. The set of points of the *projective plane* $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ are the one dimensional vector subspaces of \mathbb{R}^3 , or, equivalently, the set of lines through the origin in \mathbb{R}^3 .

Notice that \mathbb{R}^3 has coordinates (X, Y, Z) , and if you know the coordinates of a point P in \mathbb{R}^3 which is not the origin, then you can find a unique line through P and the origin. Hence the coordinate functions of \mathbb{R}^3 identify points of $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. However, many different triples of real numbers (i.e. all the coordinates of points that live on the same line) identify the same point of the projective plane.

In particular, two triples of real numbers (X_0, Y_0, Z_0) and (X_1, Y_1, Z_1) correspond to the same point of the projective plane when there exists a nonzero real number λ such that

$$(X_1, Y_1, Z_1) = (\lambda X_0, \lambda Y_0, \lambda Z_0). \quad (1.2)$$

For this reason (X, Y, Z) are not honest coordinates for the projective plane, but they are called *homogeneous coordinates* and denoted by $(X : Y : Z)$, where the colons remind us that we only care about equivalence classes under the equivalence relation described in (1.2).

To see that this geometric object is *almost* a plane, we can take any plane Π in \mathbb{R}^3 that does not pass through the origin, and see that there is a natural injective function $i_{\Pi} : \Pi \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Just to be very concrete, let us pick the plane $\Pi_Z = \{Z = 1\}$, which we can think of an affine plane with coordinates $x = X, y = Y$.

Then any point $p = (x_0, y_0) \in \Pi_Z$ gives us the point

$$(X : Y : Z) = (x_0 : y_0 : 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2.$$

Viceversa, any point $(X_0 : Y_0 : Z_0)$ in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ with $Z_0 \neq 0$ gives rise to the point in Π_Z with coordinates

$$(x, y) = \left(\frac{X_0}{Z_0}, \frac{Y_0}{Z_0} \right).$$

Any point in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ with homogeneous coordinate $Z = 0$ is not in the image of the function i_{Π} . It corresponds to a horizontal line, to which you can get as close as you want by letting the (x, y) coordinates on the plane Π grow larger and larger. For this reason the points with Z -coordinate zero are called *points at infinity* for the plane Π . Note that being a point at infinity is not an intrinsic property of certain points of $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ but rather it depends on the choice of a *screen* in \mathbb{R}^3 .

Finally let us consider the notion of change of coordinates in the projective plane. Since the homogeneous coordinates in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ are induced by the coordinates of \mathbb{R}^3 , and any linear isomorphism of \mathbb{R}^3 preserves lines through the origin, it follows that any element in $GL(3, \mathbb{R})$ determines a change of coordinates of $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. But again, two such linear maps will produce the same map from the projective plane to itself if their coefficients differ by a uniform scaling. We call an equivalence class of such maps a *projectivity*, and spell out that it has the form:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

with the determinant of the 3×3 matrix of the a_{ij} 's different from 0.

Just like in the affine case, we can substitute \mathbb{R} with our favorite field, and everything goes through allright. We denote the projective plane over the field k by \mathbb{P}_k^2 .

1.2 Lines in the plane

The simplest plane curves are lines. We present here a few ways to describe and study lines, both in the affine as well as in the projective plane.

1.2.1 Affine lines

There are two different ways to describe a line in the plane: by giving an equation that relates the coordinates of the points, or by providing a parameterization of the line, i.e. a function from an abstract line into the plane. We warm up to the idea of different fields by substituting \mathbb{R} with an arbitrary field k of characteristic 0. But feel free to think of $k = \mathbb{R}$ if that makes you more comfortable at first. If on the other hand you are an algebra buff, you

may want to think of if and what subtleties may arise when you allow the field to have positive characteristic. Hint: in the case of lines everything will go through exactly the same, but things get quite a bit more delicate as soon as one gets beyond lines.

Definition 1.3. A *line* in \mathbb{A}_k^2 is the locus of all points whose coordinates satisfy a(n affine) linear equation, i.e. an equation of the form:

$$ax + by + c = 0, \quad (1.4)$$

where $a, b, c \in k$. Equivalently, a line is the image of a function $\ell : \mathbb{A}_k^1 \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ of the form:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + ut \\ y(t) = y_0 + vt \end{cases}, \quad (1.5)$$

where $x_0, y_0, u, v \in k$.

Question 2. *How do you go from one description of a line to the other?*

We observe that the equation of a line is more or less unique: the only ambiguity is a uniform scaling factor. On the other hand the same line can admit several different parameterizations.

The main results about lines, which you will be asked to prove in the exercises, are the following:

Theorem 1.4. *Given any two distinct points in the plane, there is a unique line containing them.*

Theorem 1.5. *Given two lines $\ell_1, \ell_2 \subseteq \mathbb{A}_k^2$, exactly one of the following options happens:*

- *the two lines are the same line, and therefore have infinitely many points in common;*
- *there is exactly one point that belongs to both ℓ_1 and ℓ_2 ;*
- *$\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$, in which case we say the two lines are parallel.*

1.2.2 Projective lines

Just as in the affine case, there are two different ways to describe a line in the projective plane: by giving an equation that relates the homogeneous coordinates of the points, or by providing a parameterization of the line, i.e. a function from an abstract projective line into the plane.

Definition 1.6. A *line* in \mathbb{P}_k^2 is the locus of all points whose homogeneous coordinates satisfy a (homogeneous) linear equation, i.e. an equation of the form:

$$aX + bY + cZ = 0, \quad (1.6)$$

where $a, b, c \in k$. Equivalently, a line is the image of a function $L : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ of the form:

$$\begin{cases} X(s : t) = sX_0 + tX_1 \\ Y(s : t) = sY_0 + tY_1 \\ Z(s : t) = sZ_0 + tZ_1. \end{cases}, \quad (1.7)$$

where $X_0, Y_0, Z_0, X_1, Y_1, Z_1 \in k$.

Question 3. *What does (1.7) remind you of? Hint: from linear algebra...*

The main results about projective lines are the following:

Theorem 1.7. *Given any two distinct points in the plane, there is a unique line containing them.*

Theorem 1.8. *Given two lines $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{P}_k^2$, exactly one of the following options happens:*

- *the two lines are the same line, and therefore have infinitely many points in common;*
- *there is exactly one point that belongs to both L_1 and L_2 .*

Question 4. *What happened to parallel lines?*

1.3 Exercises

Exercise 1.1. Consider the Cartesian plane $(\mathbb{R}^2, (x, y))$. Given three points p_0, p_1, p_2 in the plane, find a description for the angle $\widehat{p_1 p_0 p_2}$ in terms of the coordinates of the three points.

Exercise 1.2. Discuss *Question 1* with the other students. If you come to a conclusion about the question, try to find the relation among different coordinate systems on the plane.

Exercise 1.3. Write the affine transformation from equation (1.1) as a matrix product.

Exercise 1.4. Can you give a geometric meaning to the coefficients a_{ij}, b_i of the transformation (1.1)?

Exercise 1.5. Show that given any three non-collinear points $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{A}_k^2$ there is an affinity $\alpha : \mathbb{A}_k^2 \rightarrow \mathbb{A}_k^2$ such that

$$\alpha((0, 0)) = p_0 \quad \alpha((1, 0)) = p_1 \quad \alpha((0, 1)) = p_2.$$

Exercise 1.6. Consider the projective plane and the inclusion of the plane $\Pi_X = \{X = 1\}$ with coordinates $(\tilde{y}, \tilde{z}) = (Y, Z)$. How do the coordinates (\tilde{y}, \tilde{z}) relate to the coordinates (x, y) from the plane Π_Z from the lecture?

Exercise 1.7. Consider 4 points in \mathbb{P}_k^2 with homogeneous coordinate $(X_i : Y_i : Z_i)$ for $i = 1, \dots, 4$. Assume further that the 3×4 matrix of these homogeneous coordinates has rank 3. Show there is a unique projectivity $p : \mathbb{P}_k^2 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$ such that

$$\begin{aligned} p(1 : 0 : 0) &= (X_1 : Y_1 : Z_1), & p(0 : 1 : 0) &= (X_2 : Y_2 : Z_2), \\ p(0 : 0 : 1) &= (X_3 : Y_3 : Z_3), & p(1 : 1 : 1) &= (X_4 : Y_4 : Z_4). \end{aligned}$$

Why is the condition on the rank of the matrix necessary?

Exercise 1.8. How do you check when a point $P \in \mathbb{A}_k^2$ belongs to a line, when the line is described via its equation? How about if it is described by a parameterization?

Exercise 1.9. How do you see when two lines are parallel, when the lines are described via their equations? How about if they described by two parameterizations? How about if one is given by its equation, and the other by a parameterization?

Exercise 1.10. How do you find the points of intersection of two lines, when the lines are described via their equations? How about if they described by two parameterizations? How about if one is given by its equation, and the other by a parameterization?

Exercise 1.11. Using the results from the previous exercises, prove Theorem (1.4) and Theorem (1.5).

Exercise 1.12. Answer the analogous questions to Exercises 1.8, 1.10 in the projective case.

Exercise 1.13. Consider a line ℓ with equation $ax + by + c = 0$ in \mathbb{A}_k^2 . Now identify the affine plane \mathbb{A}_k^2 with the $\{Z = 1\}$ plane of k^3 and consider the line $L \subset \mathbb{P}_k^2$ that contains ℓ . What is the equation of L ? Show that L contains exactly one point at infinity. We call L the **projective closure** of ℓ .

Exercise 1.14. Consider $\mathbb{A}_k^2 \subset \mathbb{P}_k^2$. Show that the set of points at infinity forms a line in \mathbb{P}_k^2 .

Exercise 1.15. Show that the projective closure of two affine parallel lines intersect in a point at infinity.

Exercise 1.16. Show that the set of all lines in \mathbb{P}_k^2 is itself parameterized by a projective plane. Sometimes this is called the **dual plane** and denoted by $(\mathbb{P}_k^2)^\vee$.

Lecture 2

Plane algebraic curves

In this lecture we introduce the main characters of this mini-course: algebraic curves, i.e. loci in the plane described as the solutions of one polynomial equation. Today we will focus on some local properties, i.e. properties of points in the curve that depend only on what the curve looks like in a (small) neighborhood of the point. We see that having a well-defined tangent line is what makes a curve smooth at a point, and we see what kind of things happen when the curve is not smooth.

2.1 Affine curves

We begin by defining what an algebraic curve is. We generalize the definition of a line in the plane by allowing the defining polynomial equation to have degree greater than one.

Definition 2.1. An **affine, plane algebraic curve** $C \subset \mathbb{A}_k^2$ is the locus of points in the plane whose coordinates satisfy a polynomial equation in two variables; i.e. let $f(x, y) \in k[x, y]$, then:

$$C = \{p \in \mathbb{A}_k^2 \mid f(x(p), y(p)) = 0\}.$$

We denote by $V(f)$ the affine plane curve determined by the polynomial f . If f is a polynomial of degree d , we say that $V(f)$ is a curve of **degree** d .

Example 2.2. The first example of plane affine algebraic curves is, of course, lines, which are curves of degree 1:

$$\ell = V(ax + by + c),$$

where $a, b, c \in k$.

Example 2.3. Affine real plane curves of degree two are called conic sections (of just **conics** for short), because they can all be obtained by slicing a cone in three dimensions with a plane. We explore this in Exercise 2.1. Here are some familiar examples of conics:

circle:

$$V(x^2 + y^2 - R^2),$$

with $R \in \mathbb{R}_{>0}$ the radius.

parabola:

$$V(y - ax^2 - bx - c),$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$.

ellipse:

$$V(a^2x^2 + b^2y^2 - c^2),$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$.

hyperbola:

$$V(a^2x^2 - b^2y^2 - c^2),$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$.

two lines:

$$V(xy).$$

a single line: can also be a curve of degree 2

$$V(x^2).$$

The last two examples are a little bit strange...in a sense what the algebra is telling us (these are conics) is conflicting with what our eyes are telling us, which is that these shapes are just made up of lines. We reconcile this discrepancy by making some definitions.

Definition 2.4. A plane affine curve C is **irreducible** if it cannot be written as the nontrivial union of two algebraic curves C_1, C_2 . (i.e. both $C_i \neq C$ for $i = 1, 2$.)

A plane affine curve C of degree d is **reduced** if it is not equal to a plane affine curve of strictly lower degree.

So we see that the curve $V(xy)$ is not irreducible and the curve $V(x^2)$ is not reduced. In Exercise 2.5 you will see that a curve $V(f)$ is irreducible if and only if f is an irreducible polynomial in the sense of algebra, and $V(f)$ is reduced if and only if the prime factorization of f does not contain any multiple factors. We will mostly restrict our attention to **reduced, irreducible** curves.

A simple but important perspective about algebraic curves is that one can think of the polynomial f as a function $f : \mathbb{A}_k^2 \rightarrow k$, and the curve $V(f)$ as a level set for such a function, or if you want as the inverse image of the point $0 \in \mathbb{C}$:

$$V(f) = f^{-1}(0).$$

Remark 2.5. Suppose you have a function $\Phi : \mathbb{A}_k^2 \rightarrow \mathbb{A}_k^2$ and a plane affine curve $V(f)$. It is easy to consider the inverse image of $V(f)$ via Φ , because that is simply $V(f \circ \Phi)$. It is substantially more complicated to describe the image of the curve via Φ .

In particular if $T : (\tilde{x}, \tilde{y}) = T(x, y)$ is a change of coordinates, and $f \in k[x, y]$ defines a curve $C = V(f)$, then the curve in the new coordinates is $V(f \circ T^{-1})$.

Any time we are interested in some geometric property that is invariant under the chosen change of coordinates, we may choose to change coordinates to simplify our life.

Example 2.6. The equation of a circle in the plane can be rather complicated. On the other hand, if one chooses a Cartesian reference frame that has the origin at the center of the circle, then the equation simplifies to $x^2 + y^2 = R^2$, with the radius of the circle easily read off the equation.

Definition 2.7. A **parametrization** of a plane affine curve C is a generically 1 : 1 function $\phi : k \rightarrow \mathbb{A}_k^2$ of the form:

$$\phi : \begin{cases} x(t) = \frac{p(t)}{q(t)} \\ y(t) = \frac{r(t)}{s(t)} \end{cases},$$

with $p, q, r, s \in k[t]$.

Not all affine plane curves admit a parameterization. Those that do are called **rational** curves.

We have already seen that all lines are rational curves. We will prove later that all conics are also rational, but as soon as we hit degree three, the situation becomes quite a bit more subtle and interesting.

2.2 Projective curves

We now turn our attention to curves in the projective plane \mathbb{P}_k^2 . First of all let us notice that a general polynomial equation does not have a well defined set of solutions in projective space.

For example, the equation $X - 1 = 0$ is satisfied by the triple $(X, Y, Z) = (1, 1, 1)$, but not by the triple $(X, Y, Z) = (2, 2, 2)$. But $(1 : 1 : 1) = (2 : 2 : 2)$ as homogeneous coordinates, which means that the corresponding point in \mathbb{P}_k^2 simultaneously is and is not a solution. That's not good. We fix the problem by restricting our attention just to homogeneous polynomials.

Definition 2.8. A **projective plane algebraic curve** $C \subset \mathbb{P}_k^2$ is the locus of points in the plane whose homogeneous coordinates satisfy a homogeneous polynomial equation in three variables; i.e. let $F(X, Y, Z) \in k[X, Y, Z]$ homogeneous, then:

$$C = \{p \in \mathbb{P}_k^2 \mid F(X(p) : Y(p) : Z(p)) = 0\}.$$

We denote by $V(F)$ the projective plane curve determined by the polynomial F . If F is a polynomial of degree d , we call $V(F)$ a curve of **degree** d .

Lines and conics have their projective version, simply by taking homogeneous polynomials of degrees one and two.

As in the affine case, one can use a projective change of coordinates to simplify the study of properties of a projective curve that are invariant under projective changes of coordinate. Two projective curves that differ by a change of coordinates are called **projectively equivalent**.

Definition 2.9. A **parametrization** of a projective plane curve C is a generically 1 : 1 function $\phi : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$ of the form:

$$\phi : \begin{cases} X(S : T) = P(S, T) \\ Y(S : T) = Q(S, T) \\ Z(S : T) = R(S, T) \end{cases},$$

with $P, Q, R \in k[S, T]$ homogeneous polynomials of the same degree d .

Not all projective plane curves admit a parameterization. Those that do are called **rational** curves.

Given a projective curve in $C \subset \mathbb{P}_k^2$, one can obtain an affine curve by taking its inverse image in k^3 and intersecting with any plane not through the

origin of k^3 . While this procedure works with any plane you choose (together with a choice of affine coordinates compatible with the linear coordinates of k^3), there are three distinguished planes for which the equation of the resulting affine curve can be readily described: the planes $\Pi_Z = \{Z = 1\}$, $\Pi_Y = \{Y = 1\}$ and $\Pi_X = \{X = 1\}$.

In this case the equation for the resulting affine curves are given by **dehomogenizing** the polynomial:

$$f_X(y, z) := F(1, y, z),$$

$$f_Y(x, z) := F(x, 1, z),$$

$$f_Z(x, y) = F(x, y, 1).$$

Example 2.10. Observe that the affine curves that you can obtain from different dehomogenizations may be rather different affine curves. For example if $F = X^2 + Y^2 - Z^2$, we have that

$$V(f_Z) = V(x^2 + y^2 - 1)$$

is a circle, while

$$V(f_X) = V(1 + y^2 - z^2)$$

is a hyperbola.

Viceversa, given an affine curve in a plane with coordinates x, y , we can identify its ambient plane with the plane $\{Z = 1\}$ in k^3 . Then an affine curve $V(f)$ defines in a natural way a projective curve $V(F)$, where F is the **homogeneization** of the polynomial f :

$$F(X, Y, Z) = Z^{\deg(f)} f(X/Z, Y/Z).$$

Homogeneization and dehomogenization are *almost* inverse operations to each other. In Exercise 2.13, you will make precise what *almost* means.

2.3 Tangent lines and smoothness

In this section we develop the notion of smoothness of a curve. Intuitively, a curve is smooth at a point p if when you zoom in very closely to the point the curve looks like just a little piece of the field k . This is a local property

(it depends only on a neighborhood of p) so we can allow ourselves to study it only for affine plane curves. The way that we formalize this idea is that we can find a unique line that best approximates the curve at the point p .

If we take the perspective that an affine curve is the level set of a function, then calculus tells us that the gradient of the function at a point p should be perpendicular to the level set. Therefore a tangent line, if it exists, is the line through the point p which is perpendicular to the gradient of the function. This motivates us to make the following definition.

Definition 2.11. Let $p \in C = V(f)$ be a point of a plane affine curve in \mathbb{A}_k^2 . We say that C is **smooth at p** if

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p) \right) \neq (0, 0),$$

i.e. if at least one of the partial derivatives of f is not zero at p .

We say that C is a **smooth curve** if it is smooth at every point.

If C is smooth at a point p , then the **tangent line** to C at p is the line:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p) \right) \cdot (x - x(p), y - y(p)) = 0.$$

2.4 Singular points

The points of a curve that are not smooth are called **singular**. In this section we focus on the local geometry of a plane curve near a singular point. Again, because we are doing a local analysis, we can restrict our attention to affine curves, and since we are going to be focusing on one singular point at a time, we may make our algebra simpler by choosing a coordinate system that puts such point at the origin (note that this can always be done by a translation for example).

We take as a fact (it is less obvious than it seems at first, but proving it would take us on a too long sidetrack) that an irreducible, reduced, plane algebraic curve has finitely many singular points.

Definition 2.12. Let p be a singular point of $V(f)$, and without loss of generality assume that we have chosen a coordinate system such that $p = (0, 0)$. Then p is called an **m -tuple point** if m is the degree of the lowest degree monomial appearing in f with a non-zero coefficient.

Example 2.13. For $f(x, y) = x^3 - xy$ or $g(x, y) = x^3 - y^2$, the origin is a double point.

For a singular point p there is not a well-defined tangent line, but there is a collection of tangent lines that best approximate linearly the geometry of the curve near p .

Definition 2.14. For p an m -tuple point of $V(f)$, denote by f_m the degree m part of f . If k is algebraically closed, $\{f_m = 0\}$ is a collection of m lines (counted with multiplicities), called the **tangent cone** of $V(f)$ at p .

Example 2.15. The tangent cone of $V(x^5 + x^3y + x^2y^2)$ is given by the union of the lines $x = 0, y = 0$ and $x + y = 0$. The line $x = 0$ is counted with multiplicity two, so the tangent cone should be thought of as four lines.

The simplest type of singular points, when $m = 2$, have been given names based on what the tangent cone looks like: a double point whose tangent cone consists of two distinct lines is called a **node**, whereas one whose tangent cone is a double line is called a **cusp**.

We conclude this section with a method that gives a more refined approximation of the behavior of a curve near a singular point.

Very near the origin, the value of x and y are very tiny...in calculus and some analysis class we call them infinitesimal. When we study limits we introduce the concept of orders of infinitesimal, and show, for example, that a limit of a quotient of functions only depends on the orders of infinitesimal of the two functions.

Now consider a polynomial equation, and assume we have factored out any common factor of x or y , so the equation does not represent a reducible curve having one of the axes as a component. To be concrete let us take the specific example:

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + x^2 + xy.$$

We already know that $V(f)$ is singular at the origin, where it is a double point with tangent cone consisting of the lines $V(x)$ and the line $V(x + y)$.

Now, if x is an infinitesimal of order m , and y is an infinitesimal of order n , then we have that:

- x^4 is an infinitesimal of order $4m$;
- y^4 is an infinitesimal of order $4n$;

- x^2 is an infinitesimal of order $2n$;
- xy is an infinitesimal of order $m + n$.

For a point to be a solution of f near the origin, its coordinates must have orders of infinitesimals such that:

1. at least two of the monomials have the same order of infinitesimal, so that the values of two monomials will cancel;
2. all the other monomials have higher order of infinitesimal, and therefore play an irrelevant role in the equation.

In the above example, we have:

m=1,n=1 :

$$\text{ord}(x^2) = \text{ord}(xy) = 2 < 4 = \text{ord}(x^4) = \text{ord}(y^4).$$

The equation can then be approximated by $x^2 + xy = x(x + y)$. Factoring out the x , which is an overall multiple and therefore does not contribute to the balancing of the infinitesimals, we obtain the line $V(x + y)$, which is indeed one of the lines of the tangent cone.

m=3,n=1 :

$$\text{ord}(y^4) = \text{ord}(xy) = 4 < 6 = \text{ord}(x^2) < 12 = \text{ord}(x^4).$$

The equation can then be approximated by $y^4 + xy = y(y^3 + x)$. Factoring out the y , we obtain the curve $V(x + y^3)$; this curve determines the other tangent line of the tangent cone, and it gives us more refined information by saying that the branch of our curve with vertical tangent looks like the inflection point in the graph of a cubic function.

There is a nice combinatorial method to find what are the approximating branches, the *Newton polygon method*, which we describe here and you are asked to prove in the Exercises.

For every monomial that has non-zero coefficient in the polynomial f , plot its exponent vector on the positive quadrant of the plane. Consider the lower convex hull of the points you plotted, and look at its boundary segments that intersect with the interior of the quadrant (i.e. ignore those

that agree with a piece of x or y axis). Each of these segments contains at least two of the points you plotted. For each segment, the monomials in f whose exponent vectors belong to the segment determine, after getting rid of common factors of x and y an approximation for a branch of the curve near the singular point.

2.5 Exercises

Exercise 2.1. Consider the cone in \mathbb{R}^3 defined as $X = \{x^2 + y^2 = z^2\}$. Show that by appropriately choosing planes Π not through the origin, you may obtain a circle, an ellipse, a parabola or a hyperbola as the intersection $X \cap \Pi$.

Exercise 2.2. Describe some geometric properties of conics (e.g. symmetries, distinguished points...) and see if you can witness them and describe them through the equations.

Exercise 2.3. Show that the equation of any conic can be represented by a symmetric matrix. When you take this perspective, how does a projective change of coordinates affect the equation of a conic?

Exercise 2.4. Consider two points p, q in the plane (that you may choose to be $(\pm a, 0)$ to simplify your life a bit). Show that the locus of all points r in the plane such that the sum of the distances to p and q is constant is an ellipse. Show that the locus of all points r in the plane such that the difference of the distances to p and q is constant is a hyperbola.

Exercise 2.5. Prove that $V(fg) = V(f) \cup V(g)$. From this identity deduce that an algebraic curve $V(f)$ is irreducible if and only if the polynomial f is irreducible, and it is reduced if the prime factorization of f does not contain any repeated factors.

Exercise 2.6. Show that up to affine change of coordinates, any affine real conic is equivalent to one of the following:

ellipse: $x^2 + y^2 = 1$;

parabola: $y = x^2$;

hyperbola: $x^2 - y^2 = 1$;

two incident lines: $xy = 0$;

two parallel lines: $x^2 - x = 0$;

double line: $x^2 = 0$.

Exercise 2.7. Show that any projective curve C gives rise in a natural way to a surface in \mathbb{A}_k^3 called the **affine cone** of C . Why do you think it is called a cone?

Exercise 2.8. Prove that projective and affine parameterizations of a curve are essentially equivalent (in the sense that there are natural procedures that go from one perspective to the other). Show that the image of a parameterization is an algebraic curve. Hint: it is easier to work with projective parameterizations.

Exercise 2.9. Given a real affine smooth conic $V(f)$, how can you tell whether it is an ellipse, parabola or hyperbola by looking at its projective closure? In practice, how do you carry out this process algebraically?

Exercise 2.10. Prove that all smooth real conics are projectively equivalent. Hint: reduce the problem to a fact of linear algebra.

Exercise 2.11. Show that for a projective curve $V(F)$, being smooth is equivalent to

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial X} = \frac{\partial F}{\partial Y} = \frac{\partial F}{\partial Z} = 0 \right\} = \emptyset$$

Show that the tangent line at a point $P = (X_0 : Y_0 : Z_0)$ is given by the equation

$$X \frac{\partial F}{\partial X}|_P + Y \frac{\partial F}{\partial Y}|_P + Z \frac{\partial F}{\partial Z}|_P = 0.$$

Exercise 2.12. Describe the equation of a conic by a symmetric matrix A as in Exercise 2.3. What property of the matrix A detects the smoothness of the conic?

Exercise 2.13. Think about why homogeneization and de-homogeneization are not quite inverses of each other. What is the geometric condition for a projective curve $V(F)$ that makes it so that the curve obtained from the homogeneization of the dehomogeneization of F is not $V(F)$?

Exercise 2.14. Show that if a curve $V(f)$ is reduced, then it can have infinitely many singular points. Describe the set of singular points in terms of the prime factorization of f .

Exercise 2.15. Find the singular points, compute their multiplicities and their tangent cone, for the curve

$$V(-x^4 + x^3y + xy^2 - y^3).$$

Exercise 2.16. Use the Newton polygon method to approximate $V(x^{13} + x^8y^2 + 6x^5y^6 + xy^9 + y^{13})$ near the origin. Check that your description is compatible with the description of the tangent cone.

Exercise 2.17. Prove that the Newton polygon's method in fact detects the conditions on infinitesimals described in the lecture. Discuss when Newton's method does not produce binomial curves.

Lecture 3

How curves meet

Today we focus on how two plane curves can intersect. Lines intersect at a single point, and that is all fine and well. But if you consider the line $\ell = V(y)$ and the parabola $C = V(y - x^2)$, while it still the case that there is only one point of intersection $\ell \cap C = \{(0, 0)\}$, there are some warning signs that something is fishy:

1. The tangent lines of the two curves at the point of intersection agree, so the intersection of the linear approximations of the two curves is no longer one point but infinitely many.
2. If you perturb the line just a little bit, say from $y = 0$ to $y = \epsilon^2$, for a very small number ϵ , now you have two points of intersection $(\pm\epsilon, \epsilon^2)$. In particular, if you imagine the line having moved continuously from height zero to ϵ^2 , then the single point of intersection of $\ell \cap C$ seems to have spawned two distinct intersections.
3. If instead you move the line down, to $y = -\epsilon^2$, all of a sudden you have no points of intersection. So a continuous deformation of the situation has caused the intersection point to disappear.

We deal immediately with the last point as follows: even though we will continue to draw pictures on the real plane, which is the only one we can picture, we will be working from now on over the complex numbers (algebra buffs can replace this with any algebraically closed field). Because of the fundamental theorem of algebra, any polynomial equation in one variable has the expected number of solutions... or does it? Even in this case to make the statement of

the fundamental theorem of algebra run smoothly we must count the roots of a polynomial with their multiplicity. This suggests that intersections of curves should also come with a local invariant called multiplicity of intersection. Our goal for today is to introduce this concept in a variety of different ways. Rather than picking a single perspective and developing a mathematically tight presentation from that perspective, I want to highlight the intuition between various perspectives and their interconnections.

3.1 Transversal intersection

We start with the nicest kind of intersection points, those that we will certainly want to count with multiplicity one.

Definition 3.1. A point $p \in C_1 \cap C_2$ is a point of **transverse** intersection if p is a smooth point of both curves, and the tangent line to C_1 at p is different from the tangent line to C_2 at p .

If we choose coordinates so that $p = (0, 0)$, then p is a point of transverse intersection for $V(f_1)$ and $V(f_2)$ if and only if for $i = 1, 2$:

$$f_i(x, y) = a_i x + b_i y + \tilde{f}_i(x, y),$$

where every monomial of $\tilde{f}_i(x, y)$ has degree at least two, and $a_1 b_2 \neq a_2 b_1$.

3.2 What do we want from a multiplicity?

Before we embark into a bunch of definitions, let us stop for a second to ponder what kind of properties we would like to obtain from the theory we are about to set-up.

Given a point p in the plane and two plane curves C_1, C_2 , here are some properties we wish the (yet to be defined) multiplicity of intersection

$$m_p(C_1, C_2)$$

to have.

symmetry:

$$m_p(C_1, C_2) = m_p(C_2, C_1)$$

While this may seem an obvious request, it is actually not. In fact one can set up very natural theories where this condition is dropped, or replaced with anti-invariance... but this is another story.

invariance under change of coordinates: if Φ is an affine or a projective change of coordinates,

$$m_p(C_1, C_2) = m_{\Phi(p)}(\Phi(C_2), \Phi(C_1)).$$

empty intersection: if $p \notin C_1 \cap C_2$, then

$$m_p(C_1, C_2) = 0.$$

transversal intersections: if p is a point of transverse intersection, then

$$m_p(C_1, C_2) = 1.$$

additivity: we expect additivity under union, i.e.:

$$m_p(C_1, C_2 \cup C_3) = m_p(C_1, C_2) + m_p(C_1, C_3)$$

deformation invariance: Choose an open neighborhood U_p of the point p such that $C_1 \cap C_2 \cap U_p = \{p\}$ (p is the only point of intersection of the two curves in the neighborhood). Consider a continuous deformation of C_2 depending on a parameter t , i.e. $C_2(0) = C_2$ and the coefficients of $C_2(t)$ are continuous functions of t . Then there exists an ϵ such that for any t with $-\epsilon < t < \epsilon$

$$m_p(C_1, C_2) = \sum_{q \in U_p} m_q(C_1, C_2(t)).$$

fundamental theorem of algebra: if $C_1 = V(y)$ and $C_2 = V(y - x^n)$, then

$$m_p(C_1, C_2) = n.$$

In the next section we describe two different ways to define a notion of multiplicity of intersection. We will not have the time or energy to show that the two ways are equivalent or that each way satisfies all of these properties, because that would be a semester long course. But hopefully you will walk out with a good intuition.

3.3 Definitions of multiplicity

3.3.1 Algebraic

The first definition of intersection multiplicity we give is purely algebraic. We start by defining a ring of functions on the plane that has the property of only exploring the geometry of the plane near the origin.

Definition 3.2. The **local ring** of \mathbb{A}_k^2 at the origin, denoted $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^2, \mathbf{0}}$, is given by:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^2, \mathbf{0}} = \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in k[x, y], g(0, 0) \neq 0 \right\}.$$

The local ring has a unique maximal ideal $\mathfrak{M} = \langle x, y \rangle$, consisting of all functions that vanish at the origin, and therefore cannot be (multiplicatively) invertible. The order of vanishing of a function at the origin is detected by the power of the maximal ideal it lies in.

Definition 3.3. Given two curves $V(f_1), V(f_2)$, we define their multiplicity of intersection at the origin to be:

$$m_{\mathbf{0}}(V(f_1), V(f_2)) = \dim_k \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^2, \mathbf{0}}}{\langle f_1, f_2 \rangle}.$$

We observe first of all that if $\mathbf{0}$ is not in the intersection of the two curves, then the multiplicity is 0: say for example that $\mathbf{0}$ does not belong to $V(f_1)$; this means $f_1(0, 0) \neq 0$, which means f_1 is invertible in the local ring, and therefore $\langle f_1, f_2 \rangle = \langle 1 \rangle = \mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^2, \mathbf{0}}$, and hence the quotient is zero-dimensional.

In the exercises you will check some of the properties that we outlined in the previous section. For now, let us just believe that this is a good definition (in the sense that it has all of the above properties), and see a little bit how to work with it.

Example 3.4 (Intersections with a line). Let $f_1 = y$ and f_2 be an arbitrary polynomial which is not a multiple of y . Then

$$\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^2, \mathbf{0}}}{\langle y, f_2 \rangle} = \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^1, \mathbf{0}}}{\langle f_2(x, 0) \rangle} = \langle 1, x, \dots, x^{m-1} \rangle_k,$$

where m is such that the first non-zero coefficient of $f_2(x, 0)$ is x^m . It follows immediately then that

$$m_{\mathbf{0}}(V(y), V(f_2)) = m.$$

Example 3.5. We now compute a more complicated example. Let $f_1 = y^2 - x^3$ and $f_2 = y^3 - x^2$.

One nice thing about ideals is that often you can look at the same ideal in different ways, i.e. using different generators, and that can considerably simplify life. Let us observe this principle in action:

$$\langle y^2 - x^3, y^3 - x^2 \rangle = \langle y^2 - x^3, y^3 - x^2 - y(y^2 - x^3) \rangle = \langle y^2 - x^3, (yx - 1)x^2 \rangle$$

So we have substituted the second irreducible cuspidal curve with a reducible curve consisting of two copies of the y -axis and the conic $yx - 1$. We can now easily compute:

$$m_{\mathbf{0}}(V(y^2 - x^3), V(x)) = 2,$$

$$m_{\mathbf{0}}(V(y^2 - x^3), V(yx - 1)) = 0,$$

and then using the additivity of the multiplicity we get:

$$m_{\mathbf{0}}(V(y^2 - x^3), V(y^3 - x^2)) = 2 \cdot 2 + 0 = 4.$$

3.3.2 Analytic

The second perspective we take is more analytic. If we think of the equation of one of the curves as defining a function, then we can restrict this function to the other curve, and compute its order of vanishing at the point where we want compute the multiplicity of intersection. While this description is sufficient to make a good definition, in practice in order to be able to compute multiplicities this way, one must be able to parameterize one of the curves. As we mentioned before, not all curves can be parameterized, but one can make do with either a local parameterization (possibly by analytic functions rather than algebraic), or by parameterizing a sufficiently good approximation of the curve. We will not go deep into the technicalities of these ideas, but just show some examples in action.

Definition 3.6. Consider two curves $V(f_1), V(f_2)$ and a point $p \in V(f_2) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$. We define:

$$m_p(V(f_1), V(f_2)) = \text{ord}_p(f_1|_{V(f_2)}),$$

We define the multiplicity to be 0 if p does not belong to either curves.

Remark 3.7. A little bit of care needs to be used in defining the notion of order of vanishing of a function, especially when p is a singular point of the curve. We again adopt the tactic of showing the way in some examples rather than embarking into a potentially only confusing general discussion.

Example 3.8 (Intersections with a line). Let f_1 be an arbitrary polynomial which is not a multiple of y , and $f_2 = y$. We want to compute the multiplicity of intersection at the origin. We parameterize the line $V(f_2)$ as follows:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases}$$

We think of t as a local coordinate for the line near the origin. In order to restrict the function $f_1(x, y)$ to the line, we just plug in the parameterization and obtain a function of t :

$$f_1(x, y)|_{V(f_2)} = f_1(t, 0).$$

Then the order of vanishing of $f_1(t, 0)$ at $t = 0$ is the integer m such that the first non-zero coefficient of $f_1(t, 0)$ is t^m . It follows immediately then that

$$m_{\mathbf{0}}(V(f_1), V(f_2)) = m.$$

Example 3.9. We now compute the more complicated example from the previous section. Let $f_1 = y^2 - x^3$ and $f_2 = y^3 - x^2$. We parameterize the cuspidal curve $V(f_2)$ as follows:

$$\varphi(t) := \begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^2 \end{cases}$$

While t is not quite a local coordinate for the curve near the origin because the curve is singular there, it is a local coordinate for the line that parameterizes it. We then interpret the prescription *restrict the function $f_2(x, y)$ as pull-back via the parameterization* to obtain a function of t :

$$\varphi^*(f_2(x, y)) = f_2(t^3, t^2) = t^9 - t^4.$$

This is a function of t that vanishes to order 4 at $t = 0$, and therefore

$$m_{\mathbf{0}}(V(y^2 - x^3), V(y^3 - x^2)) = 4.$$

From the previous example we learn that a binomial function can always be parameterized. The Newton polygon method from the previous section, in many situations, allows us to approximate the branches of a curve near a singular point by curves defined by a binomial. This is often (even though making this statement precise would require some work) a good enough approximation of our curve, and therefore we can compute a large class of intersection multiplicities this way.

3.4 Exercises

Exercise 3.1. Show that points of transverse and empty intersection satisfy deformation invariance.

Exercise 3.2. Think about what would entail proving that the properties of the intersection multiplicity from Section 3.2 are satisfied by the multiplicity from Definition 3.3. Try to figure out which are easier, and which are harder to prove.

Exercise 3.3. Use the algebraic definition of multiplicity (Definition 3.3) to compute the intersection multiplicity at the origin of the curves $V(y^m - x^n)$, $V(y^r - x^s)$ for m, n, r, s arbitrary natural numbers.

Exercise 3.4. Think about what would entail proving that the properties of the intersection multiplicity from Section 3.2 are satisfied by the multiplicity from Definition 3.6. Try to figure out which are easier, and which are harder to prove.

Exercise 3.5. Use the analytic definition of multiplicity (Definition 3.6) to compute the intersection multiplicity at the origin of the curves $V(y^m - x^n)$, $V(y^r - x^s)$ for m, n, r, s arbitrary natural numbers.

Exercise 3.6. Compute the intersection multiplicity at the origin:

$$m_{\mathbf{0}}(V(x^{13} + x^8y^2 + 6x^5y^6 + xy^9 + y^{13}), V(y^2 - x^2 + x^3)).$$

Hint: use the Newton polygon method to approximate the branches near the origin of one of the curves.

Lecture 4

Bézout and Applications

Today we shift our attention from local properties to investigate the global behavior of the intersection of curves. The main result is Bézout's theorem, that computes the total number of points of intersection (counted with multiplicities) of two curves in terms of their degrees. Then we see some interesting applications.

4.1 Bézout's theorem

Let us introduce right away the hero of today's lecture.

Theorem 4.1 (Bézout). *Let $C_1 = V(F_1), C_2 = V(F_2)$ be two complex, projective plane curves, and let $d_1 = \deg(F_1), d_2 = \deg(F_2)$. If C_1 and C_2 have no common component (and therefore intersect in a finite number of points), we have:*

$$|C_1 \cap C_2|_m := \sum_{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2} m_p(C_1, C_2) = d_1 \cdot d_2.$$

We provide two sketches of proofs. One assumes the deformation invariance of the indices of multiplicities, which will be explored in the Exercises. The other is purely algebraic, and while it is (almost) completely elementary, it requires some lemmas from commutative algebra which are also pushed to the Exercises.

Proof 1. This first proof proceeds in two steps. First we observe that if one of the two curves is a line, then Bézout's theorem is equivalent to the Fundamental theorem of algebra. Choose a parameterization of the line ℓ (just

pay attention to not pick one where $t = \infty$ gives a point of intersection of the line with C_2), and pull-back F_2 via this parameterization. You obtain a polynomial of degree d_2 in t , whose roots correspond to the points of intersection of $C_1 \cap C_2$. Further, by our analytic definition of multiplicity of intersection, this agrees with the algebraic multiplicity of the roots. Then the fundamental theorem of algebra tells us that a polynomial with complex coefficients of degree d_2 has always d_2 roots with multiplicities.

For the second step, we deform C_1 to a union of lines, and then apply step one. Let $G = \prod_{i=1}^{d_1} (a_i X + b_i Y + c_i Z)$ and consider the family of curves

$$C_1(t) = (1 - t)F_1 + tG.$$

Note that we can rephrase the invariance of multiplicity statement in this equivalent form: for every t_0 there exists an ϵ such that for any $t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon$

$$\sum_{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2} m_p(C_1(t), C_2) = \sum_{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2} m_p(C_1(t_0), C_2).$$

This shows that the function $\tau(t) = \sum_{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2} m_p(C_1(t), C_2)$ is locally constant on the interval $[0, 1]$. Since the interval is connected and the natural numbers are a discrete set, the function is constant. Therefore one may compute the total (weighted) number of intersections between $C_1 = C_1(0)$ and C_2 , by instead computing the total number of intersection of $C_1(1)$ and C_2 . Since $C_1(1)$ consists of d_1 lines, by applying the previous step we have

$$|C_1 \cap C_2|_m = d_1 \cdot d_2.$$

□

Proof 2. This proof instead proceeds with a series of simple commutative algebra statements. First assume that we pick a system of projective coordinates in such a way that no intersection points of C_1 and C_2 lie on the line at infinity (see Exercise 4.6). Then it suffices to count the intersection points of the affine curves obtained by dehomogenizing F_1 and F_2 . We let $f_i = F_i(x, y, 1)$.

Lemma 4.2. *The natural morphism:*

$$\frac{\mathbb{C}[x, y]}{\langle f_1, f_2 \rangle} \rightarrow \bigoplus_{p \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2, p}}{\langle f_1, f_2 \rangle} \quad (4.1)$$

is an isomorphism.

□

It follows that the total sum of intersection multiplicities, which is by definition the dimension of the right hand side of (4.1), equals the dimension of the left hand side of (4.1).

Denote by f_{i,d_i} the part of the polynomial f_i consisting of the monomials of maximal degree. We will also call it the *leading part* of f_i .

We observe that assuming that C_1 and C_2 do not intersect along the line at infinity is equivalent to f_{1,d_1} and f_{2,d_2} not having any common factor (see Exercise 4.7).

Lemma 4.3. *Denote by $C[x, y]_{\leq d}$ the vector space of polynomials of degree less than or equal to d . For any d sufficiently large (in particular if $d \geq d_1 + d_2$), the following is an exact sequence of vector spaces:*

$$0 \rightarrow C[x, y]_{\leq d-d_1-d_2} \xrightarrow{\alpha} C[x, y]_{\leq d-d_1} \oplus C[x, y]_{\leq d-d_2} \xrightarrow{\beta} C[x, y]_{\leq d} \rightarrow \frac{\mathbb{C}[x, y]}{\langle f_1, f_2 \rangle} \rightarrow 0,$$

where the maps α and β are defined as follows:

$$\alpha(h) = (h \cdot f_2, -h \cdot f_1),$$

$$\beta(k_1, k_2) = f_1 k_1 + f_2 k_2.$$

By Lemma 4.3 we can compute the dimension of $\frac{\mathbb{C}[x, y]}{\langle f_1, f_2 \rangle}$ as the alternating sum of the dimensions of the previous vector spaces, and we can compute this to be $d_1 \cdot d_2$ using the identity from Exercise 4.9.

4.2 Rationality of curves

The first application of Bézout's theorem we showcase is that in certain cases it tells us that a curve can be parameterized. Here is the first example.

Theorem 4.4. *Any smooth conic in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ is isomorphic to \mathbb{P}^1 .*

Proof. Let C be a smooth conic and pick (however you want) a point $p \in C$. For any t , consider the line ℓ_t through p of slope t (allowing t to be equal to ∞). Denote by t_{tang} the slope of the tangent line to C at p . The function $\varphi : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow C$ that assigns to any $t \neq t_{\text{tang}}$ the point of intersection $\ell_t \cap C$ which is not p , and p to $t = t_{\text{tang}}$, is one to one and onto, and it provides an isomorphism with \mathbb{P}^1 . □

Theorem 4.5. *Any irreducible cubic in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ with a double point is rational.*

Proof. Let p be a double point of a cubic curve C . For any t , consider the line ℓ_t through p of slope t (allowing t to be equal to ∞). By Bézout's theorem any line ℓ_t must intersect C in three points (counted with multiplicities), but since p counts always with multiplicity at least 2, generically there will be only one other point of intersection other than p .

Consider the function $\varphi : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow C$ defined as follows:

$$\varphi(t) = \begin{cases} (\ell_t \cap C) \setminus p & \text{if } \ell_t \text{ is not in the tangent cone to } C \text{ at } p \\ p & \text{if } \ell_t \text{ is in the tangent cone to } C \text{ at } p. \end{cases}$$

The function thus defined gives a parameterization of the nodal cubic. \square

The following statement is the natural generalization of the previous two.

Theorem 4.6. *If C is a plane algebraic curve of degree d with a $(d-1)$ -tuple point, then C is rational.*

Proof. Exercise 4.11 \square

4.3 Bounds on singularities

Another series of applications of Bézout's theorem instead give a bound on the number of singular points of algebraic curves.

Theorem 4.7. *An irreducible singular plane cubic can have at most one double point. To be precise we are ruling out the possibility of more than one singular point, and the possibility of a single point of multiplicity greater than 2.*

Proof. Let C be a cubic, and assume one of the following two situations:

- C has two singular points which we call p and q ;
- C has a point of multiplicity at least three, call it p ; then let q be another point of C .

Consider the line ℓ joining p and q , and the intersection $\ell \cap C$. By Bézout's theorem $|\ell \cap C|_m = 3$. On the other hand in both situations the sum of the local multiplicities of intersection at p and q is strictly greater than 3, giving a contradiction. \square

Here is the natural generalization of this fact.

Theorem 4.8. *A curve of degree d cannot have more than $\binom{d-1}{2}$ singular points.*

Proof. Let us prove this by contradiction. We assume that C has $\binom{d-1}{2} + 1$ singular points, and show that we contradict Bézout's theorem. We need the following statement, whose proof is assigned as Exercise 4.13.

Fact 4.9. *Pick any $\binom{n}{2} - 1$ points in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. There exists a curve of degree $n - 2$ containing them.*

Pick $d - 3$ points in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ disjoint from the singular points of C , so that together with the singular points you have $\binom{d}{2} - 1$ points. By Fact 4.9 there is a curve X of degree $d - 2$ passing through all the points. Now, by Bézout's theorem we have:

$$|C \cap X|_m = d(d - 2). \quad (4.2)$$

On the other hand we can bound the total number of intersection by adding the individual bounds on all local multiplicities, to obtain:

$$|C \cap X|_m \geq 2 \cdot \left(\binom{d-1}{2} + 1 \right) + d - 3 = d(d - 2) + 1 \quad (4.3)$$

Observing that (4.2) and (4.3) contradict each other concludes the proof. \square

4.4 Genus of a smooth curve

The last application of Bézout's theorem is the most sophisticated, but also the most exciting, as in particular it shows us that most curves cannot be parameterized. We rely on some facts from complex analysis.

Fact 4.10. *Any smooth, projective, plane, complex curve is an orientable topological surface. It is therefore topologically equivalent to a torus with g holes, and the number of holes is called the **genus** of the curve.*

We introduce another interesting formula, that we will prove in Exercise 4.15 using topology.

Fact 4.11 (Riemann-Hurwitz formula). *Let C be a smooth, complex, projective curve of degree d and genus g , and $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ not in C . For any point $q \neq p$, denote by $\ell_{p,q}$ the line containing the two points. Then we have:*

$$\sum_{q \in C} (m_q(\ell_{p,q}, C) - 1) = 2g + 2d - 2. \quad (4.4)$$

With these facts, we can state and prove our main theorem.

Theorem 4.12. *A smooth projective, plane, complex curve C of degree d has genus $\binom{d-1}{2}$.*

In particular, since $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ is isomorphic to a line and has therefore genus 0, any smooth curve of degree greater than 2 cannot be parameterized, because it has positive genus. We now sketch a proof of this theorem.

Proof. Pick a line L that intersects C in d -distinct points, and pick a point $p \in L \setminus C$. Now choose a system of projective coordinates such that L is the line at infinity, and $p = (0 : 1 : 0)$. Denote by f an affine equation for $C \cap (\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus L)$. We note that

$$\sum_{q \in C \cap L} (m_q(\ell_{p,q}, C) - 1) = 0,$$

hence we can conclude that

$$\sum_{q \in C} (m_q(\ell_{p,q}, C) - 1) = \sum_{q \in C \setminus L} (m_q(\ell_{p,q}, C) - 1).$$

The next observation is that for any point $q \in C$ we have

$$m_q(\ell_{p,q}, C) - 1 = m_q \left(V \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), C \right)$$

Let $\frac{\partial F}{\partial Y}$ be the homogenization of $\frac{\partial f}{\partial y}$. Note that since we chose $(0 : 1 : 0) = p \notin C$, none of the points of intersection of C and $\frac{\partial F}{\partial Y}$ lie on the line at infinity. We can then apply Bézout's theorem to obtain:

$$\sum_{q \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus L} m_q \left(V \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), C \right) = \sum_{q \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2} m_q \left(V \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right), C \right) = d \cdot (d - 1).$$

Finally we observe that we have shown that

$$2g + 2d - 2 = \sum_{q \in C} (m_q(\ell_{p,q}, C) - 1) = d \cdot (d - 1).$$

Solving the equation above for g concludes the proof of the theorem. \square

4.5 Exercises

Exercise 4.1. Describe how many points of intersections can two affine conics have. Compare with the projective case controlled by Bézout's theorem.

Exercise 4.2. Prove that a smooth projective curve $C = V(F)$ is a complex analytic manifold of dimension 1. Hint: use the inverse function theorem.

Exercise 4.3. Let $\varphi : C \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ be a holomorphic map of analytic manifolds and $p \in C$. Show that you can always choose local coordinates z around p and w around $\varphi(p)$ such that the local analytic expression of φ is $w = z^{k_p}$, where k_p is called the **ramification order** of φ at p . Prove that for any $q \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, the quantity

$$\sum_{p \in \varphi^{-1}(q)} k_p$$

is a constant called the **degree** of φ .

Exercise 4.4. Let $C = V(F)$ be a projective curve (let us assume smooth for simplicity), and $G(X, Y, Z)$, $H(X, Y, Z)$ two homogeneous polynomials of degree k with no common factors with F . Show that G/H defines a holomorphic function from C to $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.

Exercise 4.5. Fill in the details of *Proof 1* of Bézout's theorem.

Exercise 4.6. Given a reduced projective curve C of degree d , show that you can always find a line L that intersects it in d distinct points. In fact show that if you pick a line at random, this will happen with probability one.

Exercise 4.7. Let $C_1 = V(f_1)$ and $C_2 = V(f_2)$ be two projective curves, and choose a system of projective coordinates defining a line at infinity L . Show $C_1 \cap C_2 \cap L = \emptyset$ is equivalent to f_{1,d_1} and f_{2,d_2} not having any common factor, where f_{i,d_i} denotes the part of the polynomial of maximum degree.

Exercise 4.8. Prove Lemma 4.3.

Exercise 4.9. Show that

$$\dim_k k[x, y]_{\leq d} = \binom{d+2}{2}.$$

Exercise 4.10. Write down explicitly a parameterization for the nodal cubic $V(y^2 - x^2 + x^3)$ and for the cuspidal cubic $V(y^2 - x^3)$. Understand why these parameterizations do not give an isomorphism with $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.

Exercise 4.11. Prove Theorem 4.6.

Exercise 4.12. Show that a projective plane curve of degree 9 with 4 nodes is rational.

Exercise 4.13. Given any $\binom{d+2}{2} - 1$ points in \mathbb{P}_k^2 , show that you can find a curve of degree d containing them.

Exercise 4.14. Prove Fact 4.10.

Exercise 4.15. Prove the Riemann-Hurwitz formula (Fact 4.11) as follows. Consider (the restriction of the) projection from the point p of $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ as a map φ from C to $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Consider a triangulation of $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ that contains the image of all points q where the multiplicity of intersection $m_1(\ell_{p,q}, C) > 1$. Use the inverse image of this triangulation via ϕ to compute the Euler characteristic of C . Then impose the equality with $2 - 2g$ to obtain the formula.